Analisi I - IngBM - 2018-19
COMPITO B 13 Gennaio 2018

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Studiare ill comportamento (convergente, divergente o irregolare) della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 + \log(n)}.$$

SOLUZIONE
La serie è

□CONVERGENTE □DIVERGENTE □IRREGOLARE

perché

Esercizio 2. **(4 punti)** Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = |x^3 - 4x|$.

SOLUZIONE.

I punti di massimo assoluto sono

I punti di minimo assoluto sono

perché

Esercizio 3. **(3 punti)** Siano A, B e C insiemi finiti tali che $|A| = 2$, $|B| = 4$, $|C| = 2$ e $C \subset B$. Determinare il numero delle applicazioni iniettive $f : A \to B$ tali che $f(A) \cap C \neq \emptyset$.

SOLUZIONE.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (6 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & \text{se } x \geq 0 \\ 4x - x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

.

(1) Determinare il più grande sottoinsieme C di $\mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su C sia continua.
(2) Determinare il più grande sottoinsieme aperto D di $\mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su D sia derivabile.
(3) Determinare i punti di massimo o minimo, locali o assoluti di f.
(4) Determinare gli eventuali asintoti di f.

SOLUZIONE.
$C =$

$D =$

Massimi locali

Massimi assoluti

Minimi locali

Minimi assoluti

Asintoti

Esercizio 2. (4 punti)
Si consideri il sottoinsieme X di $\mathbf{R}$ formato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che esiste $t \in \mathbf{R}$ per cui $|t-1|x = t$.

(a) Determinare se X è un intervallo.
(b) Determinare gli eventuali estremo inferiore o superiore di X.

SOLUZIONE

Esercizio 3. (4 punti) (4 punti) Siano $f_+, f_- : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funzioni continue tali che

$$lim_{n\to+\infty} f_\pm = \pm\infty, \lim_{nto-infty} f_\pm = \mp\infty.$$

Dimostrare che esiste $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $f_+(x_0) = f_-(x_0)$.
SOLUZIONE

Esercizio 4. (4 punti) Si determini $X = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{-i\} : (\frac{z-i}{z+i})^3 = 1\}$.

SOLUZIONE

Esercizio 5. (6 punti) Si determini, se esiste, la soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{t}{2y}$$

tale che $y(1) = 1$.

SOLUZIONE