June 11, 2019

SCRITTO 8-6-19: INDICAZIONI SULLE SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

Essendo i due testi molto simili, ci riferiremo solo al compito A, per B le modifiche da fare sono minime.

PRIMA PARTE

(Ex1) Ogni successione a_n monotona e' regolare; ogni sottosuccessione a_{n_j} ha lo stesso limite di a_n; la sottosuccessione a_{2k+1} e' a sua volta monotona, quindi per ipotesi converge ad un limite finito L. Ne segue che a_n converge allo stesso limite L.

(Ex2) La proposizione che dobbiamo dimostrare per induzione e'

P(n): a_n non e' razionale per ogni $n \geq 0$. Passo iniziale P(0): $a_0 = a$ non e' razionale per ipotesi. Passo induttivo: per ogni $n \geq 0$, supponendo P(n) verificata, dimostriamo che anche $P(n+1)$ e' verificata. Supponiamo per assurdo che $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} = p/q$ sia razionale; allora $a_n = (p/q)^2 - 1$ sarebbe razionale contro l'ipotesi del passo induttivo.

(Ex3) Ponendo $t = z^2$, abbiamo che $t = -1+i$ oppure $t = -1-i$. Ponendo $z = |z|e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, e risolvendo le equazioni $z^2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$, $z^2 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$ si ottengono alla fine 4 soluzioni dell'equazione data, una in ciascun quadrante.

SECONDA PARTE (Ex1) f è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché e' una funzione continua elementare. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Infatti su ciascuno degli intervalli aperti che costituiscono D la funzione f e' derivabile elementare. Negli altri punti non e' derivabile perche' non esiste il limite del rapporto incrementale. La funzione $|\sin(x)|$ è sempre positiva, i punti in cui si annulla sono minimi assoluti i punti in cui prende il valore massimo 1 sono punti di massimo assoluto. Poiché la funzione esponenziale e' crescente, lo stesso vale per f. Non ci sono altri punti di minimo o massimo locale perché rimuovendo i punti di massimo e minimo assoluti, la funzione e' derivabile con derivata mai nulla su tutti i sottointervalli aperti di $\mathbb{R}$ così ottenuti. Essendo f continua su tutto $\mathbb{R}$ non può avere asintoti verticali. Non ha altri asintoti perchè non esiste (finito o infinito) il limite di f per x che tende a $\pm\infty$.

(Ex2) Poiché f è deribabile, allora e' continua su tutto $\mathbb{R}$. Sia $T > 0$ un periodo di f. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, la restrizione di f sull'intervallo chiuso e limitato $[x_0, x_0+T]$ è continua. Per i teoremi di esistenza di massimi e minimi e dei valori intermedi, $f([x_0, x_0+T] = [m, M]$; siccome f e' periodica, $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(x_0) = f(x_0+T)$, per il teorema di Rolle esiste $y \in (x_0, x_0+T)$ tale che $f'(y) = 0$. La derivata e' periodica: per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = f'(x+T)$

(Ex3) Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono della forma $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Usando per esempio il metodo della variazione delle costanti, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e' $y_0 = 1/2t \sin(t)$. Le soluzioni per cui $y(0) = 0$ sono della forma $y(t) = c_1 \sin(t) + 1/2t \sin(t)$.