January 14, 2019

SCRITTO 12-1-19: INDICAZIONI SULLE SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

COMPITO A

PRIMA PARTE

(1) Essendo a termini positivi, la serie è sicuramente regolare. È divergente perché sappiamo dal corso che la serie armonica diverge, la successione dei termini $\dfrac{1}{2+\log(n)}$ è definitivamente maggiore della successione $\dfrac{1}{n}$, e quindi possiamo applicare il criterio del confronto.

(2) I punti di minimo assoluto sono $0, \pm 1$. I punti di massimo assoluto sono ± 2. Infatti, tali punti esistono per il teorema dei massimi e minimi; la funzione è positiva e si annulla esattemente nei punti 0 e ± 1. La funzione è derivabile sull' aperto $(-2,2)\setminus\{0,\pm 1\}$, i punti stazionari di f sono $x_\pm = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e qui la derivata seconda è negativa. Pertanto essi sono punti di massimo locale e quindi potenziali massimi assoluti; ma d' altra parte $f(2) = f(-2) = 6 > f(x_\pm) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

(3) Sono 10. Infatti 12 è il numero di tutte le applicazioni iniettive $f : A \to B$ e da questo dobbiamo togliere il numero delle applicazioni iniettive tali che $f(A) \subset (B \setminus C)$, cioè 2 perché $|B \setminus C| = 2$.

SECONDA PARTE

(1)

- $C = \mathbb{R}$ perché la funzione è restrizione di funzioni polinomiali su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e si verifica direttamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
- $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; su D è derivabile perché è restrizione di funzioni polinomiali, mentre si verifica direttamente che non esiste il limite del rapporto incrementale per x che tende a 0.
- 0 è un punto di massimo locale perché $f(0) = 0$ e f è negativa in un intorno di 0.
- Non esistono punti di massimo assoluto perché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
- I soli due punti stazionari di f su D, $x_\pm = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, sono i punti di minimo locale poiché la derivata seconda è positiva.
- Essi sono anche punti di minimo assoluto come risulta dallo studio del segno della derivata su D.
- La funzione non ha asintoti verticali perché è continua su tutto $\mathbb{R}$. Non ha asintoti orizzontali perché $\lim_{x\to\pm\infty} = +\infty$. Non ha asintoti obliqui perché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$.

(2) - L' insieme X è un intervallo. Infatti X è l' immagine dell' applicazione $x = f(t) = \dfrac{t}{|t-1|}$ definita su $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Poiché f è continua, X è l' unione dei due intervalli $f((1,+\infty))$ e $f((-\infty,1))$. Si osserva che sulla prima semiretta f è decrescente, sulla seconda è crescente, $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \pm 1$ e $\lim_{t\to 1^\pm} f(t) = +\infty$. Ne segue che il primo intervallo è uguale a $(1,+\infty)$ mentre il secondo è uguale a $(-1,+\infty)$ e quindi coincide con X.

- -1 è l' estremo inferiore di X; non ha estremo superiore perché non è superiormente limitato.

(3) L' equazione che definisce X è equivalente a $(z+i)^3 = (z-i)^3$. Svolgendo i cubi e semplificando si ottiene $z^2 = 1/3$, da cui $z = \pm 1/\sqrt{3}$. Un' altra via: si tratta di trovare per quali $k = 0,1,2$, $(z+i)/(z-i) = 2\pi k/3$. Per $k = 0$, si ottiene $i = -i$, impossibile. Per $k = 1,2$, svolgendo i conti si ritrovano le soluzioni indicate qui sopra.

(4) È l' equazione a variabili separate associata alla funzione $F(t,x) = t/2x$ definita sull' unione disgiunta di $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ e $\mathbb{R}\times(-\infty,0)$. Le curve integrali massimali dell' equazione sono contenute nella famiglia di iperboli di equazioni $x^2 - t^2/2 = c$, $c \in \mathbb{R}$. Imponendo che l' iperbole passi per il

punto $(1,1)$ otteniamo $c = 1 - 1/2 = 1/2$. Pertanto la soluzione massimale $x = y(t)$ tale che $y(1) = 1$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ da $y(t) = \sqrt{\dfrac{t^2+1}{2}}$.

COMPITO B

PRIMA PARTE

(1) Essendo a termini positivi, la serie è sicuramente regolare. È divergente perché sappiamo dal corso che la serie armonica diverge, la successione dei termini $\dfrac{1}{3+\log(n)}$ è definitivamente maggiore della successione $\dfrac{1}{n}$ e quindi possiamo applicare il criterio del confronto.

(2) I punti di minimo assoluto sono $0, \pm 2$. I punti di massimo assoluto sono $\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Tali punti esistono per il teorema dei massimi e minimi. La funzione è positiva e si annulla esattamente nei punti 0 e ± 2. La funzione è derivabile sull' aperto $(-2,2) \setminus \{0\}$ e i punti di massimo appartengono necessariamente a questo aperto. I punti $x_{\pm} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ sono i soli punti stazionari e $f(x_+) = f(x_-)$, quindi sono entrambi punti di massimo assoluto.

(3) Sono 10. Infatti 12 è il numero di tutte le applicazioni iniettive $f : A \to B$ e da questo dobbiamo togliere il numero delle applicazioni iniettive tali che $f(A) \subset (B \setminus C)$, cioè 2 perché $|B \setminus C| = 2$.

SECONDA PARTE

(1) - $C = \mathbb{R}$ perché la funzione è restrizione di funzioni polinomiali su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e si verifica direttamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; su D è derivabile perché è restrizione di funzioni polinomiali, mentre si verifica direttamente che non esiste il limite del rapporto incrementale per x che tende a 0.
- 0 è un punto di massimo locale perché $f(0) = 0$ e f è negativa in un intorno di 0.
- Non esistono punti di massimo assoluto perché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
- I soli due punti stazionari di f su D, $x_{\pm} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, sono i punti di minimo locale poiché la derivata seconda è positiva.
- Essi sono anche punti di minimo assoluto come risulta dallo studio del segno della derivata su D e dal fatto che $f(x_+) = f(x_-)$.
- La funzione non ha asintoti verticali perché è continua su tutto $\mathbb{R}$. Non ha asintoti orizzontali perché $\lim_{x\to\pm\infty} = +\infty$. Non ha asintoti obliqui perché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \pm\infty$.

(2) - L' insieme X è un intervallo. Infatti X è l' immagine dell' applicazione $x = f(t) = \dfrac{t}{|t-1|}$ definita su $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Poiché f è continua, X è l'unione dei due intervalli $f((1,+\infty))$ e $f((-\infty,1))$. Si osserva che sulla prima semiretta f è decrescente, sulla seconda è crescente, $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \pm 1$ e $\lim_{t\to 1^{\pm}} f(t) = +\infty$. Ne segue che il primo intervallo è uguale a $(1,+\infty)$ mentre il secondo è uguale a $(-1,+\infty)$ e quindi coincide con X.

- -1 è l' estremo inferiore di X; non ha estremo superiore perché non è superiormente limitato.

(3) L' equazione che definisce X è equivalente a $(z-i)^3 = (z+i)^3$. Svolgendo i cubi e semplificando si ottiene $z^2 = 1/3$, da cui $z = \pm 1/\sqrt{3}$. Un' altra via: si tratta di trovare per quali $k = 0, 1, 2$, $(z-i)/(z+i) = 2\pi k/3$. Per $k = 0$, si ottiene $i = -i$, impossibile. Per $k = 1, 2$, svolgendo i conti si ritrovano le soluzioni indicate qui sopra.

(4) È l' equazione a variabili separate associata alla funzione $F(t,x) = t/2x$ definita sull' unione disgiunta di $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$ e $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$. Le curve integrali massimali dell' equazione sono contenute nella famiglia di iperboli di equazione $x^2 - t^2/2 = c$, $c \in \mathbb{R}$. Imponendo che l' iperbole passi per il punto $(1,1)$ otteniamo $c = 1 - 1/2 = 1/2$. Pertanto la soluzione massimale $x = y(t)$ tale che $y(1) = 1$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ da $y(t) = \sqrt{\dfrac{t^2+1}{2}}$.