March 25, 2014

(TGBD 3) SULL'OMOLOGIA DELLE VARIETÀ

Lavoreremo prevalentemente con coefficienti $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2$. *Conveniamo che lavorando su R, allora tutte le varietà coinvolte nel discorso saranno R-orientate*. Sia N una n-varietà compatta, chiusa e connessa. Di solito i gruppi di m-cobordismo DIFF non orientato (risp. orientato) di N sono indicati con $\eta_m(N)$ (risp. $\Omega_m(N)$). Per uniformità di notazione, preferiamo indicarli qui con $B_m(N;R)$, dove $R = Z/2$ o Z rispettivamente. Ogni $\alpha \in B_m(N;R)$ è della forma $\alpha = [f : M \to N]$, dove M è una m-varietà liscia compatta chiusa (R-orientata) e f è una applicazione liscia. Per ogni $m \geq 0$, esiste un omomorfismo naturale a valori nell'omologia singolare:

$$\beta : B_m(N;R) \to H_m(N;R), \quad \beta(\alpha) = f_*([M]) \ .$$

Per dimostrare che è ben definito si possono usare triangolazioni differenziabili a pezzi di M o relative di $(W, \partial W)$ tale che $\partial W = M$ quando $\alpha = 0$ e una realizzazione simpliciale delle classi fondamentali $[M]$ o $[W]$. E' naturale chiedersi quando β è surgettivo, iniettivo o è un isomorfismo. Nel caso in cui è surgettivo possiamo anche chiederci di più se ogni classe α di $H_m(N;R)$ può essere rappresendata mediante (la classe fondamentale di) una sottovarietà Y di N, cioè se $\alpha = i_*([Y])$, dove i è l'inclusione. Questi problemi sono stati centrali nello studio della topologia differenziale delle varietà tra gli anni '50 e '60 del novecento, con contributi maggiori di R. Thom. La risposta naturalmente può dipendere dalla specifica varietà "obiettivo" N. Risposte che valgano per tutte le N, dipendono dalla coppia di dimensioni (m, n) e anche dai coefficienti R. Per esempio, per ogni $(0, n)$, l'omomorfismo β è facilmente un isomorfismo. Per (n, n) la risposta consiste nella trattazione delle R-classi fondamentali. Per (m, n) con $m > n$, β è banalmente surgettivo ma è in generale non iniettivo; questo fatto è *non banale* già nel caso fondamentale $(m, 0)$ (cioè N è un punto).
Tratteremo alcuni casi con m piccolo, per mezzo di argomenti geometrici diretti, con particolare attenzione al caso in cui $n \leq 4$. Questi argomenti combinano la trasversalità, una versione geometrica dell'omologia singolare e (quando possibile) procedure di desingolarizzazione (a meno di omologia) di cicli geometrici.

1. Il caso $(1, n)$

Il caso $(1, 1)$ è già stato considerato. Consideriamo la coppia $(1, 2)$. Sia $\alpha = [c]$ rappresentata da un 1-ciclo singolare (algebrico)

$$c = \sum_{r=1}^{k} \epsilon_r(\sigma_r : \Delta^1 \to N) \ .$$

Non è restrittivo supporre (eventualmente prendendo più copie di uno stesso simplesso singolare) che ogni coefficiente $\epsilon_r = \pm 1 \in R$. Costruiamo il complesso simpliciale K ottenuto, a partire da r copie disgiunte dell'1-simplesso standard, identificando i vertici che hanno la stessa immagine in N tramite l'unione delle applicazioni σ_r. Questa unione di applicazioni induce allora un' applicazione continua definita sul supporto $P = |K|$, $\sigma : P \to N$, e un sistema di parametrizzazioni parziali $\gamma_r : \Delta^1 \to P$ tali che per ogni r, $\sigma_r = \sigma \circ \gamma_r$. Poiché c è un ciclo, in ogni vertice v di K possiamo accoppiare due a due gli 1-simplessi di K in modo tale che i loro contributi al coefficiente di v nel bordo ∂c si cancellino. A meno di omologia possiamo allora sostituire (K, P, σ) con (K', P', σ') in cui abbiamo risolto le singolarità di P; cioè in ogni vertice di K' arrivano esattamente due 1-simplessi. Poiché P' è ottenuto per incollamento di 1-varietà lungo componenti di bordo, P' è allisciabile, cioè può essere considerato in una 1-varietà liscia compatta chiusa R-orientata M (non necessariamente connessa) ben definita a meno di diffeomorfismi. Possiamo approssimare l'applicazione continua σ' con una f liscia omotopa a σ'. Quindi (M, f) rappresenta α e abbiamo dimostrato che

Per $R = \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}$, $\dim N = 2$, $\beta : B_1(N;R) \to H_1(N;R)$ è surgettivo.

Vediamo ora che

Ogni classe di 1-omologia è rappresentabile con sottovarietà (cioè curve semplici) di N.

Per trasversalità, a meno di omotopia, possiamo supporre che f sia un'immersione generica con solo incroci normali semplici nella superficie N. Consideriamo la curva $C = f(M) \subset N$. Il modello locale in ogni punto di incrocio è $(D^2, \{xy = 0\})$. Su $\mathbb{Z}$, essendo M orientata, possiamo semplificare l'incrocio rimpiazzando localmente $(D^2, \{xy = 0\})$ con $(D^2, \{xy = \pm\epsilon\})$, dove $\epsilon > 0$ è abbastanza piccolo e il segno è scelto nell'unico modo per cui le orientazioni si raccordano (su $\mathbb{Z}/2$ vanno bene entrambe le semplificazioni). Semplificando in questo modo tutti gli incroci di C, otteniamo una curva curva semplice chiusa R-orientata C' tracciata su N ed è facile verificare che $\alpha = i_*([C'])$, dove i è l'inclusione. Osserviamo che su $\mathbb{Z}/2$ possiamo anche assumere che ogni 1-classe di omologia sia rappresentata da una curva semplice *connessa*: se C' non è connessa basta modificarla senza cambiare la classe di omologia attaccando ad un intorno tubolare di C' in N opportuni 1-manici embedded in N. Su $\mathbb{Z}$ questo non funziona e in generale ogni classe è rappresentata da curve orientate su N non connesse.

Mostriamo ora che

Possiamo ottenere gli stessi risultati ($\dim N = 2$*) con un approccio simpliciale.*

Fissiamo una triangolazione liscia a pezzi T di N e rappresentiamo α per mezzo di un 1-ciclo simpliciale c su T. Il modello locale di $(N = |T|, |c|)$ in ogni vertice v di T è (D^2, Y) dove Y è l'unione di un numero pari di segmenti aventi v come estremo in comune. Su $\mathbb{Z}$ questi sono orientati in modo che si abbia lo stesso numero di segmenti entranti e uscenti. Almeno una coppia di segmenti adiacenti (cioè che formano il bordo di un settore di $D^2 \setminus Y$) sono orientati in modo coerente (su $\mathbb{Z}/2$ si può selezionare arbitrariamente una coppia di segmenti adiacenti). Possiamo quindi semplificare parzialmente la singolarità di c in v ottenendo Y con due segmenti in meno in v. Procedendo per induzione e ripetendo l'operazione intorno ad ogni vertice, otteniamo infine una curva semplice e chiusa R-orientata C' tracciata su N ed è facile verificare che $\alpha = i_*([C'])$, dove i è l'inclusione.

Osserviamo infine che

Gli stessi risultati valgono in generale per ogni coppia $(1, n)$*,* $n \geq 2$*.*

Infatti la costruzione del rappresentante liscio (M, f) può essere ripetuta parola per parola. Se $n > 2$, per trasversalità possiamo supporre che già f è un embedding, quindi la stessa conclusione è più facile non avendo bisogno della desingolarizzazione finale.

2. Il caso $(2, n \geq 4)$

Partiamo da $(2, 4)$. L'inizio della costruzione è simile al caso precedente. Sia $\alpha = [c]$ rappresentata da un 2-ciclo singolare $c = \sum_{r=1}^{k} \epsilon_r(\sigma_r : \Delta^2 \to N)$. Non è restrittivo supporre che ogni coefficiente $\epsilon_r = \pm 1 \in R$. Costruiamo il complesso simpliciale K ottenuto a partire da r copie del 2-simplesso standard incollando in modo affine le 1-facce su cui l'unione delle applicazioni σ_r coincide. Questa unione di applicazioni induce allora un' applicazione continua σ definita sul supporto $P = |K|$, $\sigma : P \to N$, e un sistema di parametrizzazioni parziali $\gamma_r : \Delta^2 \to P$ tali che per ogni r, $\sigma_r = \sigma \circ \gamma_r$. Poiché c è un ciclo, non è difficile verificare le seguenti proprietà di (K, P):

- Ogni vertice v di K ha in P un intorno conico chiuso S_v di centro v e base un 1-ciclo simpliciale L_v della suddivisione baricentrica $K^{(1)}$. Rimuovendo le parti interne di tutti questi intorni S_v, otteniamo un sottopoliedro $\tilde{P}$ triangolato dalla restrizione di $K^{(1)}$.
- Ogni spigolo s di $\tilde{P}$ che sia contenuto in qualche spigolo di K, ha un intorno della forma $S_s = s \times Y$, dove Y è l'unione di un numero pari di segmenti. Su $\mathbb{Z}$ questi sono orientati in modo che si abbia lo stesso numero di segmenti entranti e uscenti lungo s. Ogni S_s interseca due S_v in un intorno Y di un vertice di L_v.

Le semplificazioni fatte nel caso $m = 1, n = 2$ possono essere fatte lungo ogni spigolo s fibra per fibra. Possiamo allora semplificare in modo coerente le singolarità di $\tilde{P}$ e di ogni L_v ottenendo una 2-varietà PL compatta R-orientata con bordo , con le componenti di bordo organizzate in gruppetti ciascuno intorno ad ogni vertice di K. Infine otteniamo un complesso K' con supporto P' aggiungendo per ogni vertice v di K, il cono sul rispettivo gruppo di componenti di bordo della 2-varietà così costruita. P' ha al più un numero finito di singolarità isolate (in corrispondenza dei vertici di K), per ogni v

di K, il nuovo L'_v è una 1 varietà compatta e chiusa (e R-orientata); P', è munito di una R-classe fondamentale $[P']$ e di un'applicazione continua $\sigma' : P' \to N$ (che coincide con σ sulla parte di P che non è stata modificata dalla semplificazione delle singolarità) tale che $\sigma'_*([P']) = \alpha$. Adesso osserviamo che ogni L'_v è un bordo. Quindi possiamo rimpiazzare ogni cono su L'_v con una 2-varietà W_v di cui L'_v è bordo, e possiamo rimpiazzare σ' prendendo su ogni W_v l'applicazione che collassa in v il complementare di un collare del bordo, e invia radialmente il complementare del collare sul complementare del vertice del cono. Abbiamo così ottenuto una superficie PL P", R-orientata munita di una applicazione continua $\sigma" : P" \to N$ tale che $\alpha = \sigma"_*([P"])$. Possiamo allisciare P" ottenendo un modello liscio M. Per esempio, si può costruire un atlante liscio per P" a partire dalla realizzazione "euclidea" di una triangolazione di P" ottenuta imponendo che ogni triangolo sia piano equilatero; per ogni punto interno ad un triangolo, la parte interna del triangolo stesso funziona da carta locale; per ogni punto interno ad un lato, la parte interna dell'unione dei due triangoli che hanno quel lato come faccia comune può essere "sviluppata" sul piano fornendo una carta locale; per ogni vertice v con angolo totale al vertice $\gamma = k\pi/3$, si può usare la mappa da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ della forma $w = z^{\gamma/2\pi}$ per costruire una carta locale definita sulla stella di triangoli intorno a v. Si noti che su $\mathbb{Z}$ questa costruzione produce in effetti una superficie di Riemann M. Infine approssimiamo σ" per mezzo di una f liscia e omotopa. Abbiamo così dimostrato che:

Per $R = \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}$ e ogni N, $\dim N = 4$, $\beta : B_2(N;R) \to H_2(N;R)$ è surgettivo.

Vediamo inoltre che

Ogni classe di 2-omologia di N può essere rappresentata da una superficie embedded in N.

Come prima possiamo supporre per trasversalità che f sia un'immersione generica con solo incroci normali. Consideriamo la superficie singolare $\Sigma = f(M)$ in N. Il modello locale in ogni incrocio è $(\mathbb{C}^2, \{xy = 0\})$ e su $\mathbb{Z}$ possiamo anche supporre che l'orientazione complessa dei due rami nell'incrocio sia compatibile con l'orientazione di M, così come l'orientazione di $\mathbb{C}^2$ è compatibile con quella di N. Possiamo semplificare ogni incrocio rimpiazzando localmente $(\mathbb{C}^2, \{xy = 0\})$ con $(\mathbb{C}^2, \{xy = \epsilon\})$, dove $\epsilon \neq 0$ è abbastanza piccolo. Semplificando in questo modo tutti gli incroci di Σ, otteniamo una superficie embedded in N, R-orientata la cui classe fondamentale rappresenta α. Si noti che, a differenza del caso $n = 2$, in questo caso possiamo anche ottenere che Σ *sia connessa*. Infatti se in un rappresentante $[M, f]$ come sopra M non è connessa, possiamo renderla connessa facendo opportune somme connesse delle componenti. Se $f(M)$ è connessa la procedura di semplificazione degli incroci che produce Σ non altera la proprietà di connessione. Si noti però che il genere di Σ può crescere molto rispetto a quello di M. Per esempio se N è semplicemente connessa, possiamo prendere per ogni classe rappresentanti della forma $[S^2, f]$, ma in generale ci sono ostruzioni a rappresentare la classe per mezzo di una 2-sfera embedded in N (torneremo più tardi su questo punto).

Osserviamo infine che

Gli stessi risultati valgono in generale per ogni coppia $(2, n)$, $n \geq 4$.

La costruzione del rappresentante liscio (M, f) può essere ripetuta parola per parola. Se $n > 4$, per trasversalità possiamo supporre che già f è un embedding, quindi la stessa conclusione è più facile non avendo bisogno della desingolarizzazione finale.

3. Omologia singolare geometrica

La tappa che in entrambi i casi precedenti ha prodotto (K', P', σ') può essere ripetuta per ogni coppia (m, n) e ogni $\alpha = [c] \in H_m(N;R)$. (K', P', σ') ha le seguenti proprietà:

(1) Il poliedro P' ha dimensione m e ogni simplesso di K' è faccia di almeno un m-simplesso.
(2) Ogni $(m-1)$-simplesso di K' è faccia di esattamente 2 m-simplessi.
(3) Ogni componente connessa di P' ha una R-classe fondamentale simpliciale; se indichiamo con $[P']$ la somma di queste classi fondamentali si ha che $\sigma'_*([P']) = \alpha$.

L'esistenza di una tale triangolazione $P' = |K'|$ può essere espressa in termini di proprietà poliedrali di P' dicendo che: (1) P' ha dimensione *pura* m; (2) è singolare in codimensione 2, cioè esiste un sottopoliedro $S(P')$ di P', tale che $\dim S(P') \leq m - 2$ ed ogni punto di $P' \setminus S(P')$ è un punto di m-varietà poliedrale; (3) P' è R-orientabile. Un poliedro, sia P, con queste proprietà è detto un *R-ciclo geometrico di dimensione m*; ogni applicazione continua $f : P \to N$ è detto un *R-ciclo* *geometrico singolare (di dimensione m) in N*. Se il ciclo singolare (algebrico) iniziale è un bordo $c = \partial b$; allora possiamo applicare una versione relativa della stessa costruzione producendo un $(m+1)$-ciclo geometrico con bordo Q' munito di un'applicazione continua $\tilde{\sigma}' : Q' \to N$ tale che $\partial Q' = P'$, $\tilde{\sigma}'|P' = \sigma'$. Anche Q' è singolare in codimensione 2 e $S(P') \subset S(Q')$ (ma in generale $S(Q') \cap P' \neq \emptyset$ anche se $S(P') = \emptyset$). In questo modo si è prodotta una versione geometrica dell'omologia singolare che permette di interpretarla come una teoria generalizzata di *cobordismo singolare* dove certe singolarità di tipo prescritto sono ammesse. Si noti per esempio che se $m \geq 2$, il cono cP su un m-ciclo geometrico P chiuso è un ciclo geometrico con bordo uguale a P. In questo modo ritroviamo nella formulazione geometrica l'assiona di "dimensione" dell'omologia singolare che determina l'omologia nel caso $(m, 0)$.

4. Ancora su $(1, n \geq 2)$, $(2, n \geq 4)$

Dimostriamo che

Per ogni $(1, n)$*, l'omomorfismo* $\beta : B_1(N; R) \to H_1(N; R)$ *è un isomorfismo.*

Prendiamo un rappresentante liscio (M, f) di $0 \in H_1(N; R)$. Vogliamo dimostrare che $[M, f] = 0 \in B_1(N; R)$. (M, f) è il bordo di un 2-ciclo geometrico (Q, F); $S(Q)$ consiste di un numero finito di punti. Se $S(Q) \cup M = \emptyset$, possiamo desingolarizzare e allisciare Q lontano da M ottenendo (Q', F') liscio che ha (M, f) come bordo. Se $p \in S(Q) \cap M$ allora Q è localmente il cono di centro p su un 1-ciclo a bordo Z, tale che $\partial Z = Z \cap M$ e consiste di due punti. Desingolarizzando come al solito Q lungo le componenti chiuse di Z otteniamo ancora un (Q', F') liscio del tipo voluto.
Dimostriamo ora che su $\mathbb{Z}$

Per ogni $(2, n)$*, l'omomorfismo* $\beta : B_2(N; \mathbb{Z}) \to H_2(N; \mathbb{Z})$ *è un isomorfismo .*

Ci limitiamo ad alcuni cenni. Prendiamo un rappresentante liscio (M, f) di $0 \in H_2(N; \mathbb{Z})$. Vogliamo dimostrare che $[M, f] = 0 \in B_2(N; \mathbb{Z})$. (M, f) è il bordo di un 3-ciclo geometrico (Q, F); $S(Q)$ è un poliedro di dimensione 1. Si può desingolarizzare Q prima lungo i lati di $S(Q)$ operando trasversalmente fibra per fibra il tipo di semplicazione che abbiamo operato nell'ultima tappa del caso precedente. In questo modo costruiamo (Q', F') che ha per bordo (M, F) e $S(Q')$ formato da un numero finito di punti. Per ciascuno di questi punti p, Q' è localmente il cono di centro p su una 2-varieta' poliedrale orientata (eventualmente con una componente a bordo che è un 2-disco propriamente embedded se $p \in M = \partial Q'$). Dunque tutte le componenti chiuse bordano una 3-varietà orientata (seguirà da un teorema di classificazione delle superfici che analizzeremo in seguito). Possiamo allora risolvere la singolarità conica intorno ad ogni tale p ottenendo alla fine $(Q", F")$ che ha per bordo (M, F) e dove $Q"$ è una 3-varietà poliedrale. L'allisciamento è meno semplice, ma invochiamo qui senza dimostrazione questo risultato della geometria PL 3-dimensionale. Vedremo in seguito un'altra dimostrazione basata sull'esistenza delle cosiddette "superfici di Seifert".

5. Trasversalità, controvarianza e prodotti sul cobordismo DIFF

N è come al solito una n-varietà connessa R-orientata. Data una classe di cobordismo $\alpha = [f : M \to N] \in B_m(N; R)$ definiamo la *codimensione di* α *rispetto a* N:

$$\mathrm{codim}_N(\alpha) = \dim N - \dim M = n - m \ .$$

Per ogni $j \leq n$, poniamo

$$B^j(N; R) = B_{n-j}(N; R)$$

e sia

$$\mathcal{D} : B^j(N; R) \to B_{n-j}(N; R), \quad \mathcal{D}(\alpha) = \alpha$$

l'*isomorfismo tautologico*. Il vantaggio di indicizzare gli R-moduli di cobordismo di N via la codimensione (rispetto ad N) consiste nel fatto che, usando opportunamente la trasversalità, i moduli $B^j(N; R)$ diventano un functore *controvariante* definito sulla categoria DIFF. Ricordiamo che i moduli $B_j(X; R)$, definiti tra l'altro per ogni spazio topologico X (non necessariamente una varietà), sono piuttosto e in modo naturale un functore covariante. Allo stesso tempo

$$B^*(N; R) = \bigoplus_j B^j(N; R)$$

viene munito di una struttura moltiplicativa R-bilineare graduata. Si tratta di utilizzare e reinterpretare una costruzione già vista in [TGBD(1)]. Data una coppia di applicazioni lisce tra varietà lisce compatte chiuse, $f : M \to N$ e $g : Z \to N$, dove $\dim M = m$, $\dim Z = s$ consideriamo:

- L'applicazione prodotto:
$$f \times g : M \times Z \to N \times N \ ;$$
- L'applicazione diagonale
$$\Delta : N \to N \times N$$
con immagine la sottovarietà diagonale $\Delta_N = \Delta(N) \subset N \times N$.

Per trasversalità, a meno di omotopia, possiamo supporre che $f \pitchfork g$, cioè che (per definizione) $(f \times g) \pitchfork \Delta_N$. Allora
$$Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_N)$$
è una sottovarietà di $M \times Z$ e $n = (m + s) - \dim Y$. Poniamo:

(1) $f \sqcup g : Y \to N, \quad f \sqcup g = \Delta^{-1} \circ (f \times g)_{|Y}$;
(2) La restrizione della proiezione sul fattore M: $p_M : Y \to M$;

Poniamo adesso: $\alpha = [f : M \to N] \in B^j(N; R)$, $\gamma = [g : Z \to N] \in B^k(N; R)$; oppure consideriamo $f : M \to N$ semplicemente come un morfismo di DIFF . Poniamo:

- $\alpha \sqcup \gamma = [f \sqcup g : Y \to N] \in B^{j+k}(N; R)$;
- $\alpha \times \gamma = [f \times g : M \times Z \to N \times N] \in B^{j+k}(N \times N; R)$;
- $f^*(\gamma) = [p_M : Y \to M] \in B^k(M; R)$.

Ripetute applicazioni del "Lemma chiave" di [TGBD(1)] mostrano che in questo modo abbiamo *ben definito*:

- Un'applicazione R-bilineare
$$\sqcup : B^j(N; R) \times B^k(N; R) \to B^{j+k}(N; R)$$
- Un'applicazione R-lineare
$$\times : B^j(N; R) \times B^k(N; R) \to B^{j+k}(N \times N; R)$$
- Un'applicazione R-lineare
$$f^* : H^k(N; R) \to H^k(M; R) \ .$$

Le seguenti affermazioni possono essere tutte dimostrate direttamente per via geometrica.

(1) **(Functorialità controvariante)** $(f \circ h)^* = h^* \circ f^*$, $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$.
(2) **(Naturalità del prodotto $\sqcup$)** $f^*(\sigma \sqcup \gamma) = f^*(\sigma) \sqcup f^*(\gamma)$.
(3) $\sigma \sqcup \gamma = \Delta^*(\sigma \times \gamma)$.
(4) Se $\sigma \in B^j$ e $\gamma \in B^k$, allora $\sigma \sqcup \gamma = (-1)^{jk} \gamma \sqcup \sigma$

Se $j + k = n$, ricordando che $B^n(N; R) = B_0(N; R) = R$, abbiamo un' applicazione bilineare a valori in R. In particolare, se $n = 2m$ questo definisce una forma bilineare
$$\sqcup : B^m(N; R) \times B^m(N; R) \to R$$
che risulta simmetrica se $n = 4m$, simplettica altrimenti.

Usando gli isomorfismi tautologici $\mathcal{D} : B^j(N; R) \to B_{n-j}(N; R)$ possiamo definire varianti dei prodotti così costruiti:

- $\sqcap : B_r(N; R) \times B^k(N; R) \to B_{r-k}(N; R), \quad \sigma \sqcap \phi = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{-1}(\sigma) \sqcup \phi)$;
- $\hat{\sqcup} : B_r(N; R) \times B_s(N; R) \to B_{r+s-n}(N; R), \quad \sigma \hat{\sqcup} \gamma = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{-1}(\sigma) \sqcup \mathcal{D}^{-1}(\gamma))$.

Si verifica ancora per via geometrica che:

(1) $f_*(\sigma) \sqcap \phi = f_*(\sigma \sqcap f^*(\phi))$;
(2) $\mathcal{D}(\phi) = [id : N \to N] \sqcap \phi$;

(3) Se $r-k=0$, per ogni ϕ, $\sqcap\phi : B_r(N;R) \to R$ è un funzionale R-lineare, quindi $\phi \to \sqcap\phi$ definisce un omomorfismo $\tilde{\sqcap} : B^k(N;R) \to \mathrm{Hom}(B_r(N;R),R)$ (scriveremo semplicemente $\phi(\sigma)$ invece di $\tilde{\sqcap}(\phi)(\sigma)$). Allora abbiamo:

$$\psi(\sigma \sqcap \phi) = (\phi \sqcup \psi)(\sigma) \ .$$

(4) Se $n=2m$, possiamo definire la *forma di intersezione*

$$\cdot : B_m(N;R) \times B_m(N;R) \to R, \quad \sigma \cdot \gamma = \sigma \hat{\sqcup} \gamma \ .$$

Si verifica formalmente che

$$\mathcal{D}(\phi) \cdot \mathcal{D}(\psi) = (\phi \sqcup \psi)([id : N \to N]) \ .$$

5.1. **Prodotti geometrici sull'omologia singolare e forme di intersezione.** Consideriamo i soliti omomorfismi $\beta : B_m(N;R) \to H_m(N;R)$. Vogliamo mostrare che

Il prodotto $\hat{\sqcup}$ definito sopra discende sulle immagini $\beta(B_m(N;R)) \subset H_m(N;R)$, quindi su tutto $H_*(N;R)$ nel caso in cui i morfismi β coinvolti siano surgettivi.

La cosa è immediata se tutti i β coinvolti sono isomorfismi. In generale il punto chiave consiste nel verificare che se $\beta(\gamma)=0$, allora per ogni α, $\beta(\alpha\hat{\sqcup}\gamma)=0$. Si tratta di adattare il "Lemma chiave". Sia $\alpha=[f : M \to N]$, $\gamma=[g : Z \to N]$ e sia $G : Q = |K| \to N$ un ciclo singolare geometrico tale che $\partial(Q,G)=(Z,g)$. Al solito supponiamo che $f \pitchfork g$. A meno di una piccola perturbazione di G senza modificare g possiamo supporre anche che f sia "multitrasversa a G" (cioè $f \pitchfork G_0$, dove G_0 è la restrizione di G allo 0-scheletro K^0 di K, e poi induttivamente supponendo che $f \pitchfork G_r$, si perturba G su $K^{r+1} \setminus K^r$ in modo da ottenere $f \pitchfork G_{k+1}$). Allora $((f\times G)^{-1}(\Delta_N), \Delta^{-1}\circ (f\times G)_|)$ fornisce un'omologia con zero di $\beta([f : M \to N]\hat{\sqcup}[g : Z \to N])$.

Ci sono due applicazioni particolarmente interessanti per il nostro discorso in dimensione bassa cioè *le forme di intersezione* simmetriche quando $n=\dim N=2$ e $R=\mathbb{Z}/2$ oppure quando $n=\dim N=4$ e $R=\mathbb{Z}$ rispettivamente:

$$\cdot : H_1(N;\mathbb{Z}/2) \times H_1(N;\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$$

$$\cdot : H_2(N;\mathbb{Z}) \times H_2(N;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \ .$$

Dimostriamo per via geometrica che

Queste forme di intersezione sono non singolari.

Per $n=2$, sia $\alpha = i_*([C]) \neq 0$ dove C è una curva semplice connessa su N. Allora $N \setminus C$ è connessa. Prendiamo un piccolo arco semplice trasverso a C in N che interseca C esattamente in un punto. Le due estremità dell'arco stanno in $N \setminus C$, quindi possono essere connesse con un altro arco semplice. L'unione dei due archi forma una curva semplice e chiusa C' in N tale che, posto $\gamma = i_*([C])$, si ha evidentemente che $\alpha\cdot\gamma = 1$. Quindi la forma di intersezione è non singolare.

Per $n=4$, la giustificazione è più elaborata. Diamo uno schizzo degli argomenti geometrici utilizzati (che saranno ripresi poi con più dettagli). Sia $\alpha = i_*([\Sigma]) \neq 0$, dove Σ è una superficie orientata connessa in N. Vogliamo dimostrare che esiste una classe di 2-omologia γ tale che $\alpha\cdot\gamma \neq 0$. Se $i_*([\Sigma])\cdot i_*([\Sigma]) \neq 0$ abbiamo finito. Altrimenti il fibrato normale di Σ in N è un prodotto e lo stesso vale per un intorno tubolare U di Σ in N. Sia $D \simeq D^2$ una fibra orientata dell' intorno tubolare, con bordo orientato $S \simeq S^1$. I casi sono due:

(1) Esistono $p \neq 0$ copie parallele di S che sono omologhe a zero in $N\setminus \mathrm{Int}(U)$. Incollando (lungo il bordo comune) un ciclo geometrico che realizza l'omologia a zero con p copie di D, otteniamo un ciclo geometrico chiuso Q tale che $i_*([\Sigma])\cdot[Q]) = p$.
(2) Altrimenti vedremo in seguito (nel contesto di un risultato più generale in codimensione 2 su $\mathbb{Z}$) che Σ ammetterebbe una "superficie di Seifert" in N, contro l'ipotesi che $\alpha = i_*([\Sigma]) \neq 0$.

5.2. **Relazioni con i prodotti cup e cap in (co-)omologia singolare e la Dualità di Poincaré.** Avendo definito e dimostrato direttamente per via geometrica che le nostre forme di intersezione preferite sono non singolari, questa sezione non sarebbe strettamente necessaria per il proseguimento (di gran parte) del nostro discorso. Ma essa è comunque concettualmente importante. Non ultimo il fatto che tutte le considerazioni che seguono e che non fanno riferimento ai prodotti definiti geometricamente via la trasversalità valgono anche nella categorioa TOP.

Ricordiamo da ETA che in (co-)omologia singolare sono definiti (per via prevalentemente algebrico/omologica):

- Il prodotto cup $\cup : H^j(N;R) \times H^k(N;R) \to H^{j+k}(N;R)$;
- Il prodotto cross $H^j(N;R) \times H^k(N;R) \to H^{j+k}(N \times N;R)$;
- Il prodotto cap $\cap : H_r(N;R) \times H^k(N;R) \to H_{r-k}(N;R)$. E tutto questo vale per uno spazio topologico X arbitrario, non necesariamente una varietà N.
- Inoltre abbiamo l'isomorfismo di Dualità di Poincaré che vale anche se N è TOP, non necessariamente DIFF:

$$D : H^j(N;R) \to H_{n-j}(N;R),\ D(\phi) = [N] \cap \phi\ .$$

Ricordando che la co-omologia è naturalmente un functore controvariante, valgono le seguenti proprietà:

1. **(Naturalità del prodotto $\cup$)** $f^*(\sigma \cup \gamma) = f^*(\sigma) \cup f^*(\gamma)$.
2. $\sigma \cup \gamma = \Delta^*(\sigma \times \gamma)$.
3. Se $\sigma \in H^j$ e $\gamma \in H^k$, allora $\sigma \cup \gamma = (-1)^{jk}\gamma \cup \sigma$.
   Si noti che mentre nel caso del prodotto geometrico $\sqcup$ questa formula derivava da considerazioni elementari sulle orientazioni, nel caso del prodotto $\cup$ la dimostrazione (algebrico/omologica) è abbastanza riposta.
4. $f_*(\sigma) \cap \phi = f_*(\sigma \cap f^*(\phi))$;
5. $\psi(\sigma \cap \phi) = (\phi \cup \psi)(\sigma)$.

In particolare, se $n = 2m$ definiamo la forma bilineare

$$<,>: H^m(N;R) \times H^m(N;R) \to R,\ < \phi, \psi >= \psi \cup \psi([N])$$

che è simmetrica su $\mathbb{Z}/2$ mentre su $\mathbb{Z}$ è simmetrica se $n = 4m$, simplettica altrimenti. Usando l'isomorfismo di dualità di Poincaré, possiamo definire la forma indotta:

$$(,) : H^m(N;R) \times H^m(N;R) \to R,\ < \phi, \psi >= (D(\psi), D(\psi))\ .$$

Dimostriamo che

Se $H^m(N;R)$ è un R-modulo libero allora $<,>$ (quindi $(,)$) è non singolare .

Consideriamo l'omomorfismo $D^* \circ h$ dove

$$h : H^m(N;R) \to \mathrm{Hom}(H_m(N;R), R)$$

è l'isomorfismo a cui si riduce in queste ipotesi il teorema dei coefficienti universali, mentre D^* è l'omomorfismo trasposto di D. Usando le relazioni tra i prodotti cup e cap enunciate sopra, si verifica facilmente che $<,>$ è non singolare se e solo se D^* (cioè D) è un isomorfismo, ma questo fatto è proprio la dualità di Poincaré. *Se $R = \mathbb{Z}$ e $H^m(N;R)$ non è libero, la stessa conclusione vale restringendo $<,>$ (e $(,)$) alla parte libera $H^m(N;\mathbb{Z})/T$.*

Le forti analogie formali e strutturali tra le forme di intersezione geometriche definite sopra quando N è DIFF e la forma $(,)$ non sono accidentali. Dimostriamo che in effetti coincidono, almeno quando $R = \mathbb{Z}$ e tutte le classi di $H_m(N;\mathbb{Z})$ sono rappresentate da sottovarietà di N (come capita nei nostri esempi preferiti). Se $D(\phi) = i_*([M])$, $D(\phi) = i_*([Z])$ dobbiamo mostrare che

$$\phi \cup \psi([N]) = i_*([M]) \cdot i_*([Z])$$

usando le relazioni tra i prodotti cup e cap, questo è equivalente a mostrare che

$$\phi(i_*([Z]) = i_*([M]) \cdot i_*([Z])\ .$$

Ci sono potenzialmente due approcci possibili. Uno simpliciale, usando una triangolazione differenziabile a pezzi relativa (T, K, H) della terna (N, M, Z) e usando le definizioni dei prodotti cup e cap a livello di cicli e/o cocicli algebrici. L'altro è più nello spirito dell'uso della struttura DIFF e si ottiene tensorizzando per $\mathbb{R}$ e riformulando la relazione in termini della co-omologia di de Rham. Se ω è una forma chiusa che rappresenta ϕ dobbiamo allora dimostrare che

$$\int_Z \omega = i_*([M]) \cdot i_*([Z]) \ .$$

C'è un modo molto trasparente di costruire una tale forma ω che esplicita la dualità di Poincaré nel contesto de Rham (si veda per esempio il libro [Bot-Tu, Differential forms in algebraic topology]). In coordimate locali, $(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots y_m)$ tali che $M = \{y_1 = \dots = y_m = 0\}$ ed è orientato come $\mathbb{R}_{x_1,\dots,x_m}$, allora $\omega = f(x_1, \dots, x_m) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$ dove f è una funzione a foruncolo tale che $\int_{\mathbb{R}^m} f = 1$. E' allora immediato verificare che ogni punto di incrocio tra M e Z contribuisce con ± 1 a $\int_M \omega$ così che $\int_Z \omega = i_*([M]) \cdot i_*([Z])$ come voluto. Si noti che combinando questi risultati *abbiamo ottenuto un'altra dimostrazione indiretta che le forme di intersezione in dimensione bassa sono non singolari.*

6. I casi $(n-1, n)$ e $(n-2, n)$

Riprendiamo adesso l'analisi di alcuni casi degli omomorfismi β. Cominciamo con la coppia $(n-1, n)$. Ricordiamo che $P(\mathbb{R})^\infty$ è uno spazio $K(\mathbb{Z}/2, 1)$ mentre S^1 è uno spazio $K(\mathbb{Z}, 1)$. Sia $D(\phi) = \alpha \in H_{n-1}(N; R)$. Dunque $\phi \in H^1(N; R)$ corrisponde ad un omomorfismo $\pi_1(N) \to R$ (che si fattorizza tramite la proiezione sul quoziente $p : \pi_1(N) \to H_1(N; \mathbb{Z}) = \pi_1(N)/[\pi_1, \pi_1]$). Dunque $\phi = f_*$ per qualche $f : N \to K(R, 1)$ univocamente definito a meno di omotopia. Dunque abbiamo stabilito una bigezione tra $H^1(N; R)$ e le classi di omotopia $[N, K(R, 1)]$. In particolare $\phi = 0$ se e solo se f è omotopicamente banale. Ricordiamo anche che $P(\mathbb{R})^\infty$ è lo spazio classificante per i fibrati vettoriali reali di rango 1 su N; associando ad ogni $f : N \to P(\mathbb{R})^\infty$ il fibrato pull-back $f^*(\Gamma)`toN$ del fibrato tautologico su $P(\mathbb{R})^\infty$, si stabilisce una bigezione tra $[N, P(\mathbb{R})^\infty]$ e i corrispondenti fibrati lineari su N (a meno di isomorfismo di fibrati). In particolare il fibrato $f^*(\Gamma)$ è banale (cio è è isomorfo al fibrato prodotto) se e solo se f è omotopicamente banale. Inoltre, poiché N è compatta, esiste un $k >> 0$ (che dipende solo dalla dimensione n) tale che:

(1) Ogni $g : N \to P(\mathbb{R})^\infty$ è omotopa ad una $i \circ f : N \to P(\mathbb{R})^k$ dove $i : P(\mathbb{R})^k \to P(\mathbb{R})^\infty$ è l'inclusione.
(2) $f, f' : N \to P(\mathbb{R})^k$ sono omotope se e solo se $i \circ f$ e $i \circ f'$ sono omotope.

Assumendo che $f : N \to P(\mathbb{R})^k$ sia trasverso a $P(\mathbb{R})^{k-1} \subset P(\mathbb{R})^k$, (risp. $f : N \to S^1$ sia trasverso ad un punto $p \in S^1$) abbiamo che l'ipersuperficie R-orientata $f^{-1}(P(\mathbb{R})^{k-1})$ (risp. $f^{-1}(p)$) rappresenta α; si noti che questo rappresentante di α è in effetti ottenuto per autointersezione trasversa della sezione nulla del fibrato $f^*(\Gamma)$. Abbiamo così dimostrato che:

$\beta : B_{n-1}(N; R) \to H_{n-1}(H; R)$ *è surgettivo e ogni classe di omologia in codimensione* 1 *è rappresentata da ipersuperfici lisce M in N. Inoltre, data una tale coppia (N, M), presa una triangolazione differenziabile a pezzi relativa (T, H) e lavorando in omologia simpliciale si realizza che M rappresenta la classe nulla se e solo se è bordo di una sottovarietà di N di codimensione* 0*. Quindi in effetti β è un isomorfismo.*

In codimensione 1 *le stesse conclusioni potevano essere ottenute lavorando completamente in omologia simpliciale*. Analogamente a quanto fatto per $(1, 2)$ si tratta di desingolarizzare (non astrattamente ma in modo embedded in N) un $(n-1)$-ciclo simpliciale c portato da una fissata triangolazione differenziale a pezzi T di N. Consideriamo la decomposizione in manici di N associata alla triangolazione. L'intersezione del sistema di manici con $|c|$ fornisce un sistema di "intorni regolari" in $|c|$ degli scheletri di $|c|$, definiti induttivamente: un intorno U_0 dello 0-scheletro, un intorno U_1 dell'intersezione dell' 1-scheletro con il complementare della parte interna di U_0 ecc. Lungo ogni k-simplesso σ vediamo un k-manico $D^k \times D^{n-k}$ e U_k è isomorfo al prodotto di σ per il cono di centro $0 \in D^{n-k}$ e di base un poliedro $L(\sigma)$ contenuto nella sfera $S^{n-k-1} = \partial D^{n-k}$. L'idea è quella di desingolarizzare $|c|$ in modo induttivo, per induzione sulla codimensione del luogo singolare, partendo dal ciclo iniziale $Q_0 = c$ che è singolare in codimensione 0, per arrivare ad un ciclo omologo non singolare. Supponendo di avere realizzato un ciclo omologo Q_k singolare in codimensione k (a meno di avere eventualmente suddiviso la triangolazione di N), lavoriamo lungo ogni simplesso σ di dimensione $n-k+1$. Dunque la componente di U_{n-k+1} relativa a σ è tale che $L(\sigma)$ è una ipersuperficie liscia nella $(k-2)$-sfera $S^{k-2} = \partial D^{k-1}$. Su $\mathbb{Z}/2$, $L(\sigma)$ è un bordo e possiamo desingolarizzare U_{n-k+1} lungo ogni σ, sostituendo il cono su $L(\sigma)$ con una varietà W tale che $\partial W = S$. Su $\mathbb{Z}$ dobbiamo tenere conto delle orientazioni, dunque la desingolarizzazione sarà fatta per passi successivi partendo dalla componente di $L(\sigma)$ più "interna". Possiamo infine completare questa desingolarizzazione con gli scheletri di dimensione più bassa, generalizzando quanto fatto negli esempi precedenti, costruendo così Q_{k+1} singolare in codimensione $k+1$ che rappresenta la stessa classe.

Veniamo ora al caso $(n-2, n)$. In questo caso otterremo il risultato solo su $\mathbb{Z}$ (su $\mathbb{Z}/2$ in effetti è falso). Ricordiamo che $P(\mathbb{C})^\infty$ è un $K(\mathbb{Z}, 2)$. Allora, in modo analogo a quanto fatto prima, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $H^2(N;\mathbb{Z})$ e $[N, P(\mathbb{C})^\infty]$. $P(\mathbb{C})^\infty$ è anche lo spazio classificante dei fibrati vettoriali reali orientati di rango 2 su N (equivalentemente complessi di rango 1). Per compattezza di N, possiamo "troncare" a $P(\mathbb{C})^k$ dove $k >> 0$ e dipende solo da n. Dunque se $D(\phi) = \alpha$, ϕ corrisponde a $f \in [N, P(\mathbb{C})^k]$, allora possiamo supporre che f sia trasversa a $P(\mathbb{C})^{k-1}$ e infine α è rappresentata da $f^{-1}(P(\mathbb{C})^{k-1})$. Anche in questo caso questo rappresentante di α è ottenuto come autointersezione trasversa della zero sezione del fibrato associato ad f. In conclusione abbiamo dimostrata:

Per ogni N, $\dim N \geq 2$, $\beta : B_{n-2}(N;\mathbb{Z}) \to H_{n-2}(N;\mathbb{Z})$ è surgettivo e ogni classe di omologia in codimensione 2 è rappresentata da sottovarietà lisce M di N.

6.1. **Superfici di Seifert.** Vogliamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 6.1. *Sia $M \subset N$ una sottovarietà orientata di N di codimensione 2 tale che $i_*([M]) = 0 \in H_{n-2}(N;\mathbb{Z})$. Allora esiste una sottovarietà orientata con bordo W di N di dimensione $n-1$ tale che $\partial W = M$. Ne segue che per ogni N, $\dim N \geq 2$, $\beta : B_{n-2}(N;\mathbb{Z}) \to H_{n-2}(N;\mathbb{Z})$ è un isomorfismo.*

Dim. Poiché $i_*([M]) = 0$ l'autointersezione di M in N è omologicamente banale, quindi lo è quella di M in un suo intorno tubolare o, equivalentemente, come sezione nulla del fibrato normale in N, che è orientato di rango 2. Per i risultati della sezione precedente, segue che ogni intorno tubolare aperto U di M in N è diffeomorfo ad un prodotto. Fissata una banalizzazione $h_0 : \partial(N \setminus U) \to M \times S^1$, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle banalizzazioni e $H^1(M;\mathbb{Z})$. Prendiamo una fibra orientata $D \simeq D^2$ di $\overline{U}$, con bordo orientato $S \simeq S^1$. Affermiamo che $\alpha = i_*([S])$ genera un sottogruppo ciclico infinito di $H_1(N \setminus U;\mathbb{Z})$. Infatti se p copie parallele di S fossero omologicamente nulle, incollando lungo il bordo comune un ciclo geometrico relativo che realizza l'omologia a zero con p copie di D, avremmo costruito un ciclo geometrico chiuso in N con intersezione non banale con M, ma questo è impossibile perché M è omologicamente banale in N. Poiché α è indivisibile, esiste $\phi \in H^1(N \setminus U;\mathbb{Z})$ tale che $\phi(\alpha) = 1$. Siano $j : \partial(N \setminus U) \to N \setminus U$, $r : S \to \partial(N \setminus U)$ le inclusioni. Se a ϕ corrisponde (la classe di omotopia di) una applicazione $f_\phi : N \setminus U \to S^1 \simeq S$, allora $\psi = j^*\phi$ corrisponde alla restrizione f_ψ di f_ϕ su $\partial(N \setminus U)$, mentre la restrizione di f_ψ a $S \simeq S^1$ corrisponde a $(jr)^*(\phi)$ ed è (omotopa a) l'identità. Modificando la banalizzazione h_0 in una banalizzazione h grazie alla restrizione di ψ a $M \times \{q\} \subset \partial(N \setminus U) \simeq_{h_0} M \times S^1$, e indicata con $p : M \times S^1 \to S^1$ la proiezione, si realizza che f_ψ si fattorizza nella forma $f_\psi = p \circ h$, quindi che f_ϕ si restringe a $p \circ h$ sul bordo. Mettendo f_ϕ trasversa a $q \in S^1$, $W = f_\phi^{-1}(q)$ è una superficie di Seifert cercata.

□

Una tale W è detta una *superficie di Seifert per M in N*. Il caso in cui $M = K$ è un nodo in $N = S^3$ è probabilmente quello più familiare. Un nodo (orientato) K in S^3 ha una longitudine privilegiata γ_0 data da un collare in una qualsiasi superficie di Seifert di K in S^3. Dunque ogni altra longitudine γ_n è determinata da un intero n (il numero di allacciamento di γ_n con γ_0). Nel caso di un nodo K in S^3 esiste un algoritmo per costruire una superficie di Seifert a partire da un qualsiasi diagramma planare di K.

In generale esiste un algoritmo per *costruire superfici di Seifert, desingolarizzando in modo induttivo un ciclo simpliciale relativo che ha per bordo M*. Sia (T, H) una triangolazione differenziabile a pezzi relativa di (N,M) e sia $Q_0 = |K_0|$ un $(n-1)$-ciclo simpliciale tale che $\partial Q_0 = M$. Q_0 è singolare in codimensione zero. Si tratta di costruire induttivamente Q_1, Q_2, ..., singolari in cosimensione 1, 2, ... seguendo lo schema con cui prima abbiamo desingolarizzato i cicli simpliciali chiusi di codimensione 1. C'è però una differenza in questa versione relativa. Nel caso chiuso (assoluto) potevamo lavorare su $R = \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}$, mentre qui è essenziale l'uso delle orientazioni e dobbiamo quindi lavorare su $\mathbb{Z}$. In effetti gli argomenti geometrici della dimostrazione già vista dell'esistenza delle superfici di Seifert si "localizzano" ripetutamente nei vari passi del processo di desingolarizzazione. Per semplicità descriviamo l'ultimo passo (gli altri sono simili lavorando nelle b-sfera $L(\sigma, N)$ del manico di cui σ è il cuore, per ogni simplesso σ di cui dobbiamo desingolarizzare un intorno regolare in K_i). Allora sia v un vertice di Q_{n-1}. Se v non appartiene a M, lavoriamo come nel caso assoluto. Se $v \in M$, consideriamo La $b-sfera$ $L(v,N) \simeq S^{n-1}$ dello 0-manico D^n di N intorno a v. Allora, $D^n \cap Q_{n-1}$ è il cono di centro $0 \in D^n$ e base $V = L(v, Q_{n-1}) \pitchfork L(v,N)$. Quest'ultima intersezione è una sottovarietà di codimensione 1 in $L(v,N)$ con bordo ∂V dato da una $(n-3)$-sfera $S \subset L(v,N) \simeq S^{n-1}$ non annodata. Quindi S borda un $(n-2)$-disco D in $L(v,N)$. Le intersezioni del bordo di un intorno tubolare di U di S in $L(v,N)$ con V e D rispettivamente forniscono due sezioni di U. Poiché $V \cup D$ (opportunamente orientati) è un ciclo omologicamente banale, le due sezioni sono omologhe, quindi omotope e possiamo supporre a meno di isotopia che coincidano. Quindi possiamo supporre che V e D coincidano in U. L'intersezione di $V \cup D$ con il complementare E della parte interna di U è un ciclo di codimensione 1 in $L(v,N)$ che è un bordo. Parametrizzando radialmente $D^n \setminus \{v\} \simeq L(v,N) \times (0,1]$, consideriamo in $E \times [1/2, 1]$ la varietà

$$T = ((V \cap E) \times \{1\}) \cup (\partial E \times [1/2, 1]) \cup ((D \cap E) \times \{1/2\} \ .$$

Allora T borda una varietà W' in E $\times [1/2, 1]$, che completiamo prendendo $W = W' \cup (V \cup U) \times [1/2, 1]$. Completiamo la costruzione di Q_n prendendo il cono di centro v su $D \times \{1/2\}$. Osserviamo infine che come corollario di quanto fatto qui sopra (usando in particolare ripetutamente l'esistenza di superfici di Seifert, possiamo desingolarizzare un ciclo simpliciale di N di codimensione 2 che rappresenta $\alpha \in H_{n-2}(N; \mathbb{Z})$, ottenendo un'altra dimostrazione del fatto che ogni tale α si rappresenta per mezzo di sottovarietà.