Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO B 17 Gennaio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA....................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$*. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$*. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$*.*

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (2,5 punti) Dire quale tra le frasi (1) (2) (3) (4) (5) è la negazione della frase

La funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *assume valori nell'intervallo chiuso e limitato* $[-5, 7]$.

(1) Esiste $x \in (-5, 7)$ tale che $f(x) < -5$ o $f(x) > 7$
(2) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ $f(x) < -5$ oppure $f(x) > 7$
(3) Per ogni $x \notin (-5, 7)$ f assume valori tra -5 e 7
(4) Esiste un $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) < -5$ oppure $f(x) > 7$
(5) f è periodica di un periodo T compreso tra 5 e 7

SOLUZIONE

□1 □2 □3

$\boxed{\text{x}}$ 4 □5 □Nessuna di queste

Esercizio 2. (4 punti) Sia $f(x)$ una funzione polinomiale non costante e $h(x) := \min(0, e^x)$. Dire, giustificando la risposta, se esiste il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(h(x) + \frac{f^2(x)}{f^2(x)+5}\right)$$

e in caso affermativo calcolarlo.

SOLUZIONE.

☐ Il limite L non esiste perché

$\boxed{\text{x}}$ Il limite L esiste e vale 1.

(a) la funzione $h(x) = \min(0, e^x) = 0$ perché la funzione esponenziale è positiva.

(b) Poiché $f(x)$ è polinomiale e non costante allora $\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$. In particolare le funzioni $f^2(x)$ e $f^2(x)+5$ sono definitivamente non nulle per $x \to +\infty$. Quindi:
$L = \lim_{x\to+\infty}\left(h(x) + \frac{f^2(x)}{f^2(x)+5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(0 + \frac{f^2(x)}{f^2(x)(1+\frac{5}{f^2(x)})}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{5}{f^2(x)})} = 1.$
La leggittimità dei passaggi è garantita proprio dal fatto che le funzioni $f^2(x)$ e $f^2(x)+5$ sono definitivamente non nulle.

Esercizio 3. (3,5 punti) Determinare il seguente integrale indefinito

$$\int (1+x^2+x^3)e^{2x}dx\ .$$

SOLUZIONE.
$I = \frac{e^{2x}}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + x^3\right) + \text{cost.}$
L'integrale si ottiene con ripetute integrazioni per parti. Infatti, più in generale, se p è una funzione tale che la derivata quarta $p^{iv} = 0$ si ha, con ripetute integrazioni per parti,

$$\int p(x)e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(p - \frac{1}{a}p' + \frac{1}{a^2}p'' - \frac{1}{a^3}p'''\right) + \text{cost.}$$

Da cui sostituendo si ottiene il risultato.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (10 punti) Per ogni $x \in \mathbf{R}$, indichiamo con $[x]$ la parte intera di x.

a) Determinare il più grande sottoinsieme X di $\mathbf{R}$ tale che la formula
$$f(x) = [\cos(x)]$$
definisca una funzione $f : X \to \mathbf{R}$.

b) Determinare il più grande sottoinsieme $C \subseteq X$ tale che la restrizione di f su C sia continua.

c) Determinare l'insieme dei punti di $D \subseteq X$ dove la funzione è derivabile.

d) Determinare l'insieme $M \subseteq X$ dei punti di massimo locale della funzione f.

e) Determinare l'insieme $m \subseteq X$ dei punti di minimo locale della funzione f.

SOLUZIONE.

a) $X = \mathbf{R}$. La funzione è una funzione definita su tutto $\mathbf{R}$ in quanto composizione di due funzioni: $x \to \cos(x)$ e $y \to [y]$ che sono definite su tutto $\mathbf{R}$. Si osserva che:
   i) L'immagine della funzione $\cos(x)$ è l'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$.
   ii) La restrizione della funzione $y \to [y]$ sull'intervallo $[-1, 1]$ ha per immagine l'insieme finito $\{-1, 0, 1\}$; precisamente: $[y] = -1$ se $y \in [-1, 0)$, $[y] = 0$ se $y \in [0, 1)$, $[1] = 1$.
   iii) Poiché $\forall x \ \ \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ si ha $\forall x \ [\cos(x + 2\pi)] = [\cos(x)]$, la funzione pertanto è periodica e $T := 2\pi$ è un periodo. [1]

   Basta quindi studiarne il comportamento nell'intervallo $[0, 2\pi)$: i valori assunti dalla funzione in tale intervallo sono
   (1) 1 in 0
   (2) 0 nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2}]$
   (3) -1 nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$
   (4) 0 nell'intervallo $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

b) $C = \mathbf{R} \setminus \left\{ \{2k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}} \right\}$

c) $D = C$. Infatti in tutti i punti di C la funzione è localmente costante e quindi derivabile con derivata nulla. Nei punti di discontinuità la funzione non può essere derivabile (perché una funzione derivabile in un punto è continua in quel punto).

d) $M = \mathbf{R}$. Infatti in tutti i punti ove la funzione è continua la funzione è localmente costante e quindi questi sono punti di massimo locale; se $x \in \{2k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}}$, allora $[\cos(x)] = 1$ quindi x è un punto di massimo assoluto (quindi locale); se $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}}$, allora $[\cos(x)] = 0$ mentre se $y > x$ ed è abbastanza vicino a x allora $[\cos(y)] = -1$, se $y < x$ ed è abbastanza vicino a x allora $[\cos(y)] = 0$.

e) $m = C$. Infatti in tutti i punti ove la funzione è continua la funzione è localmente costante e quindi questi sono punti di minimo locale; invece se x è

[1] Attenzione: questo non dimostra che 2π sia il minimo periodo.

un punto di discontinuità, segue dalle considerazioni fatte in d) che per ogni intorno $I(x,\epsilon)$ di x esiste $y \in I(x,\epsilon)$ tale che $f(x) > f(y)$ e quindi non è un punto di minimo locale.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $X \subseteq \mathbf{R}$ definito da

$$X = \{1 - \frac{1}{n}\ ; n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup ((1,2] \cap \mathbb{Q}) \cup (2, +\infty)\ .$$

Determinare:

(1) La parte interna $\mathrm{Int}(X)$ di X.
(2) La chiusura $\mathrm{Ch}(X)$ di X.
(3) L' insieme $\mathrm{Is}(X)$ dei punti isolati di X.

SOLUZIONE.

(1) $\mathrm{Int}(X) = (2, +\infty)$

(2) $\mathrm{Ch}(X) = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup [1, +\infty)$

(3) $\mathrm{Is}(X) = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}, n > 0\}$

Esercizio 3. (3 punti)
(1) Verificare che $i \in \mathbf{C}$ è una radice del polinomio

$$p(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1\ .$$

(2) Determinare tutte le radici complesse di $p(z)$.

SOLUZIONE.

Le radici complesse del polinomio sono $\pm i, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Infatti essendo il polinomio a coefficienti reali risulta che anche $\bar{i} = -i$ è una radice. Pertanto il polinomio è divisibile per il polinomio $z^2 + 1$ e risulta $p = (z^2 + 1)(z^2 + z + 1)$. Da cui il risultato.

Esercizio 4. (7 punti) Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = e^x$$

tale che $y(0) = y'(0) = 1$.

SOLUZIONE.

Iniziamo con il cercare le soluzioni dell'equazione omogenea associata. Essendo le radici del polinomio caratteristico 1 e 5, tali soluzioni saranno del tipo $C_1 e^x + C_2 e^{5x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. Inoltre il termine noto è una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente ad una radice semplice del polinomio caratteristico; pertanto l'equazione proposta ammette soluzioni particolari del tipo $\lambda x e^x$ con λ opportuno. Sostituendo e facendo il conto si verifica che in effetti la funzione $-\frac{1}{4} x e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione proposta. Quindi le soluzioni sono del tipo $C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \frac{1}{4} x e^x$: imponendo le condizioni richieste abbiamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 5C_2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

da cui otteniamo come valori per le costanti $C_1 = \dfrac{15}{16}$ e $C_2 = \dfrac{1}{16}$.