Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO A 26 Luglio 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA....................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0.(0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3 punti) Sia a_n una successione tale che $|a_n| < 3$ per ogni $n \geq 0$. Dire se esiste il limite L della successione $b_n = \sqrt[n]{n + a_n}$ per $n \to +\infty$, e nel caso affermativo calcolarlo.
SOLUZIONE.
☐Il limite L non esiste perché

$\boxed{\text{x}}$ Il limite L esiste e vale 1 perché basta osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n + a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{a_n}{n}}.$$

e che per l'ipotesi di limitatezza sulla successione $\{a_n\}$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

Esercizio 2.(4 punti) Calcolare l' integrale definito $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx$

SOLUZIONE.

$I = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{1}{3}$ perché con calcoli standard si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log\frac{1}{3}$$

Esercizio 3.(3 punti)

(1) Sia $z = a + ib \in \mathbf{C}$, $z \neq 1$. Sia $p + iq = \dfrac{1}{z-1}$ Dimostrare che $b > 0$ se e solo se $q > 0$.

(2) Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione
$$z|z| + z^2 = 0 \ .$$

SOLUZIONE.

(1) Essendo $p + iq$ l'inverso di $1 - z = (1-a) - ib$ risulta $p = \dfrac{1-a}{(1-a)^2+b^2}$ e $q = \dfrac{b}{(1-a)^2+b^2}$. Essendo il denominatore di q strettamente positivo si ha la tesi.

(2) $z = 0$ è una soluzione. Se $z \neq 0$ allora $z|z| + z^2 = 0$ implica $|z| + z = 0$ e quindi $z = -|z|$ cioè z reale negativo. Ma ogni numero reale negativo è soluzione dell'equazione, quindi l'insieme delle soluzioni in $\mathbf{C}$ è $\{z = a + ib \in \mathbf{C} \mid a \leq 0 \ b = 0\} = \mathbf{R}_- \cup \{0\}$.

3. Seconda parte

Esercizio 1.(10 punti)

a) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = \dfrac{\log(x^2)}{\log(x^2)-1}$ definisca una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.

b) Determinare il sottoinsieme $\bar{D} \subset \mathbf{R}$ formato dai punti di accumulazione dell'insieme D.

c) Giustificare che f è derivabile su D. Determinare il più grande sottoinsieme $D' \subset \mathbf{R}$ tale che $D \subset D'$ ed esiste $F : D' \to \mathbf{R}$ continua tale che la restrizione di F su D coincide con f.

d) Dire se F è derivabile su D'.

e) Calcolare gli eventuali asintoti del grafico della funzione F

f) Tracciare un grafico qualitativo della funzione F.

SOLUZIONE.

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, \sqrt{e}, -\sqrt{e}\}$ b) $\bar{D} = \mathbf{R}$

c) $\boxed{\text{x}}$ SI f è derivabile su D $\square$NO f non è derivabile su D

perché ottenuta a partire da funzioni derivabili in D applicando successivamente un numero finito di procedure che conservano la derivabilità.

$D' = \mathbf{R} \setminus \{\sqrt{e}, -\sqrt{e}\} = D \cup \{0\}$ poiché la funzione $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ è una funzione continua su D' che estende la f.

d) $\square$SI F è derivabile su D' $\boxed{\text{x}}$ NO F non è derivabile su D'

perché nel punto $x_0 = 0$ risulta

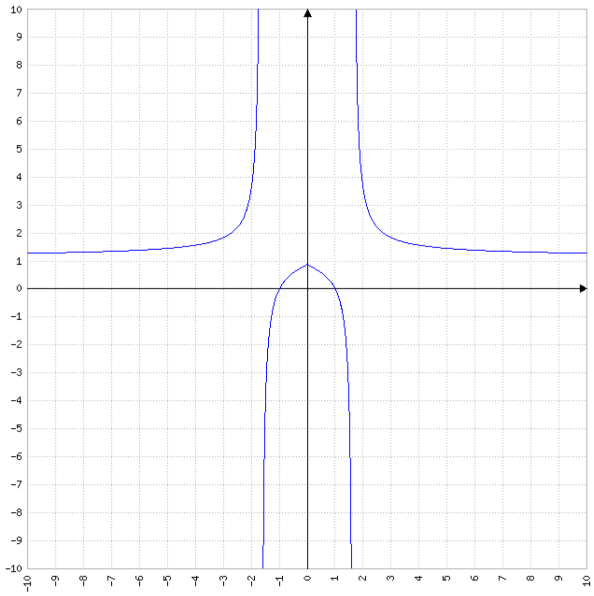
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(\log(h^2)-1)}$$

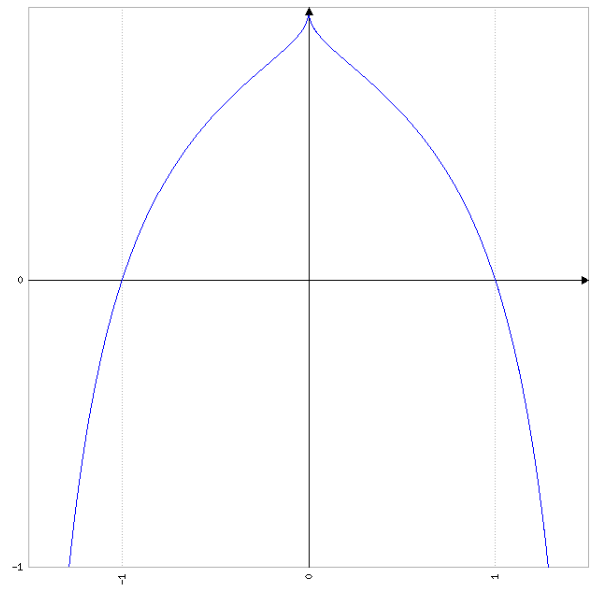
e questo limite non esiste. Infatti risulta $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h(\log(h^2)-1)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h\log(h^2)} = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h(\log(h^2)-1)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h\log(h^2)} = \infty$.

e) $\square$Il grafico di F non ammette asintoti

$\boxed{\text{x}}$ Gli asintoti del grafico di F sono le rette $x = \pm\sqrt{e}$ e $y = 1$

f) Grafico qualitativo di F





Esercizio 2.(3 punti) Sia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_0^x h(t)dt.$$

Supponiamo che esista $x_0 \neq 0$ tale che $F(x_0) = 0$. Dimostrare che esiste $t_0 \in \mathbf{R}$ tale che $h(t_0) = 0$.

SOLUZIONE.

Nell'intervallo $[x_0, 0]$ o $[0, x_0]$, a seconda che x_0 sia minore o maggiore di 0, la funzione $F(x)$ è definita e derivabile e $F(0) = F(x_0) = 0$. Pertanto per il teorema di Rolle esiste un punto t_0 nell'intervallo in cui la sua derivata si annulla. Essendo $\dfrac{dF}{dx} = h(x)$ questo dimostra l'asserto.

Esercizio 3.(3 punti) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione periodica non costante, Dire se esistono i limiti, ed in caso affermativo calcolarli:

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1} \right)$$

giustificando il risultato ottenuto.
SOLUZIONE.
$\boxed{\text{x}}$ Il limite L_1 non esiste $\square$ Il limite L_1 esiste e vale

perché la funzione $\dfrac{f^2(x)}{f^2(x)+1}$ è periodica e non costante.

$\square$ Il limite L_2 non esiste $\boxed{\text{x}}$ Il limite L_2 esiste e vale ∞

perché la funzione $g(x) = \dfrac{f^2(x)}{f^2(x)+1}$ è limitata, essendo per ogni x $0 \leq g(x) < 1$. Quindi $\lim_{x\to\infty} (x + g(x)) = \lim_{x\to\infty} x \left(1 + \dfrac{g(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x = \infty$.

Esercizio 4.(8 punti) Determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

e la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 13y = xe^x$$

tale che $y(0) = y'(0) = 0$

SOLUZIONE.
Essendo le radici del polinomio caratteristico $3 \pm 2i$, si ha che la soluzione generale dell'equazione omogenea può esprimersi come $e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.
Con uno dei vari metodi si calcola che $y = \dfrac{1}{8}(x + \dfrac{1}{2})e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione.
Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale proposta è $e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \dfrac{1}{8}(x + \dfrac{1}{2})e^x$. Imponendo le condizioni richieste si ha per le costanti $C_1 = -\dfrac{1}{16}$ e $C_2 = 0$, per cui la soluzione richiesta è $y = -\dfrac{1}{16}e^{3x} \cos 2x + \dfrac{1}{8}(x + \dfrac{1}{2})e^x$