Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO B 4 Luglio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Si determinino tutti i numeri complessi $z \in \mathbf{C}$ che sono soluzione dell'equazione:

$$(\bar{z} + i)^3 = i\ .$$

SOLUZIONE. Le soluzioni complesse dell'equazione sono: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ 2i$.
Infatti $(\bar{z} + i)^3 = i$ significa che $\bar{z} + i$ deve essere una delle tre radici cubiche di i, cioè uno dei 3 numeri complessi

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -i$$

da cui otteniamo $\bar{z} = -i + (\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ oppure $\bar{z} = -i - i = -2i$ cioè in definitiva abbiamo che le soluzioni sono

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ 2i$$

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita dalla formula

$$f(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$$

Determinare (se esistono):

(1) I punti di minimo e massimo locale della funzione f.
(2) I punti di minimo e massimo assoluto della funzione f.
(3) Gli asintoti del grafico della funzione f.

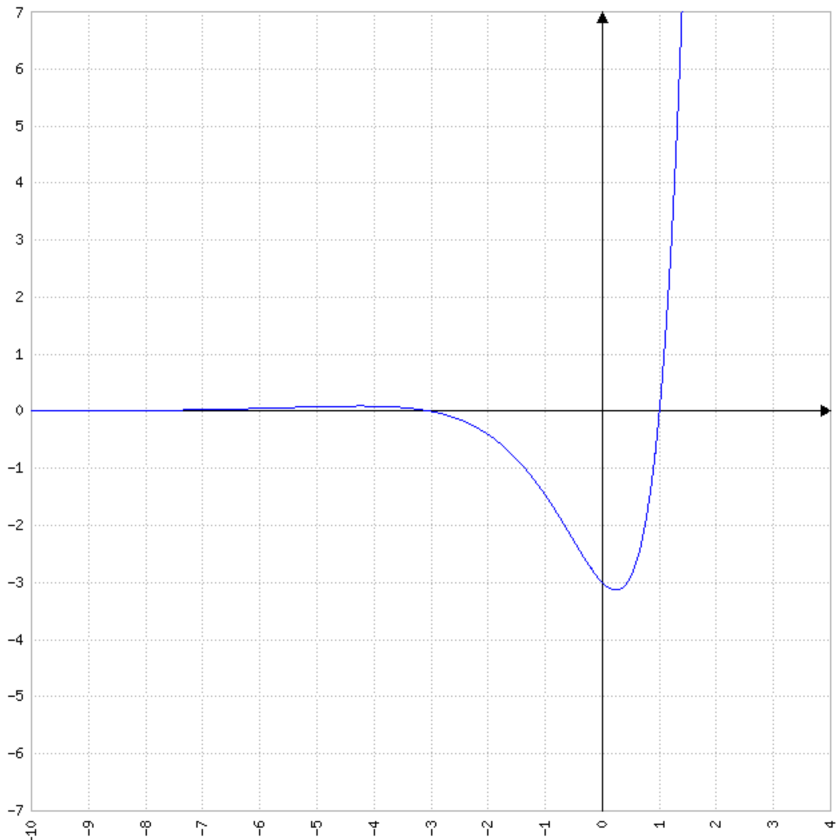
SOLUZIONE. La formula definisce una funzione continua da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, derivabile in tutto il dominio di definizione. Possiamo quindi applicare per il calcolo dei massimi e minimi gli strumenti del calcolo differenziale. Scrivendo la funzione come

$$f = e^x(x^2 + 2x - 3) = e^x(x + 3)(x - 1)$$

si vede immediatamente che la funzione si annulla nei due punti -3 e 1 dove cambia segno e che quindi la funzione è positiva nell'insieme $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ e negativa nell'intervallo $(-3\,, 1)$.
La derivata prima e seconda della funzione risultano rispettivamente

$$f' = e^x(x^2 + 4x - 1) = e^x(x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5}))$$
$$f'' = e^x(x^2 + 6x + 3) = e^x(x + 3 + \sqrt{6})(x + 3 - \sqrt{6}).$$

I teoremi del calcolo differenziale ci permettono di affermare che la funzione ha un punto di massimo locale in $-2 - \sqrt{5}$ e uno di minimo locale in $-2 + \sqrt{5}$. Tale punto risulta anche essere un punto di minimo assoluto poiché, dallo studio del segno della derivata risulta che lo è nell'intervallo $\left(-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\right)$ dove la funzione è negativa (e nulla agli estremi) e al di fuori di questo intervallo la funzione è positiva. Poiché la funzione al tendere di x a $+\infty$ tende a $+\infty$, il punto di massimo è solo un punto di massimo locale e la funzione non ha punti di massimo assoluto nel suo insieme di definizione.
Per calcolare gli asintoti osserviamo che non vi sono asintoti verticali, che essendo $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ non vi sono asintoti obliqui nella parte destra del grafico e che essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (come risulta immediatamente applicando il teorema di de l' Hôpital) l'asse delle x è un asintoto orizzontale per la parte sinistra del grafico.
Includiamo un grafico che illustra il comportamento qualitativo della funzione.



3. Seconda parte

Esercizio 1. (7 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4x+3}dx$$

SOLUZIONE
$I = -6 + \frac{1}{2}(27\log 5 - 28\log 3)$
Infatti, utilizzando procedimenti standard, l'integrale può scriversi

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4x+3}dx = \int_0^2 \left(x - 4 + \frac{13x+12}{(x+1)(x+3)}\right)dx = \int_0^2 \left(x - 4 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{x+3} - \frac{1}{x+1}\right)\right)dx$$

da cui otteniamo

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{2}\left(27\log|x+3| - \log|x+1|\right)\right]_0^2 = -6 + \frac{1}{2}(27\log 5 - 28\log 3)$$

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri la formula

$$f(x) = x\log_e^2(x)$$

(1) Giustificare che la formula definisce una funzione derivabile $f : (1, +\infty) \to \mathbf{R}$.

(2) Determinare l'immagine $I(f) \subset \mathbf{R}$ di f e dimostrare che $f:(1,+\infty) \to I(f)$ è bigettiva con inversa $g: I(f) \to (1,+\infty)$ derivabile.
(3) Calcolare $g'(4e^2)$.

SOLUZIONE. La formula definisce una funzione derivabile $f:(1,+\infty) \to \mathbf{R}$ poiché risulta ottenuta come prodotto della funzione polinomiale x e della funzione $(\log_e x)^2$, entrambe derivabili in tale insieme.
Si osservi che $f'(x) = \log_e x(\log_e x + 2)$, per cui in tutto l'intervallo $(1,\infty)$ la derivata è strettamente positiva, cioè la funzione f risulta in tale intervallo monotona crescente, quindi iniettiva. Inoltre poiché $f(1) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ si ha, per il teorema dei valori intermedi, che $I(f) = (0,+\infty)$. Pertanto la funzione in tale insieme risulta invertibile con inversa $g:(0,+\infty) \to (1,+\infty)$ differenziabile poichè, (cfr. dispensa [DERIVATE] pag 3), in ogni punto dell'intervallo $(1,+\infty)$ si ha $f'(x) \neq 0$.
Infine, essendo $4e^2 = f(e^2)$, si ha $g'(4e^2) = \dfrac{1}{f'(e^2)} = \dfrac{1}{\log_e e^2(\log_e e^2 + 2)} = \dfrac{1}{8}$.

Esercizio 3. (10 punti) Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$$

tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

SOLUZIONE. Con le procedure standard si vede che, essendo 1 e 3 le radici dell'equazione caratteristica, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è del tipo $Ae^x + Be^{3x}$. Ai fini della ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, essendo la funzione a termine noto a sua volta soluzione ell'equazione omogenea, per le considerazioni usuali, (cfr ad esempio dispensa EQUADIFF2 pag 11), si ha che una soluzione particolare sarà del tipo $\lambda x e^{3x}$: facendo gli opportuni calcoli otteniamo per λ il valore $\dfrac{1}{2}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione proposta è $Ae^x + Be^{3x} + \dfrac{1}{2}xe^{3x}$.
Impomemdo infine le condizioni iniziali richieste si ha $A = \dfrac{1}{4}$ e $B = -\dfrac{1}{4}$, cioè
$y = \dfrac{1}{4}e^x - \dfrac{1}{4}e^{3x} + \dfrac{1}{2}xe^{3x}$.