Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 25 Luglio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti)
Sia a_n la successione

$$a_n = \frac{2^n + n^3}{3^n + n^2}$$

Si dica se esiste il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ed in caso affermativo calcolarlo.

SOLUZIONE.
□ Il limite L non esiste

$\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale 0

perché si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1+\frac{n^3}{2^n})}{3^n(1+\frac{n^2}{3^n})}$ e per i risultati sull'ordine relativo di crescenza di alcune succesioni (vedi dispensa LIMSUCC) si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Esercizio 2. (3 punti) Anna dice all'amica Bianca che tutti i suoi amici sono sinceri e affidabili e Bianca risponde di fare attenzione perché a suo giudizio non è vero.
Bianca con questo intende dire ad Anna che (barrare la casella corrispondente)

□ Nessun suo amico è sincero e affidabile
□ Tra i suoi amici ci sono amici sinceri ma non affidabili
$\boxed{\text{X}}$ Tra i suoi amici c'è qualcuno che non è sincero o che non è affidabile
□ Anna ha almeno un amico che non è sincero e non è affidabile.

SPIEGAZIONE.
Detti A l'insieme delle persone che Anna ritiene affidabili ed S quello delle persone che Anna ritiene sincere, l'affermazione di Anna è che l'insieme $\mathcal{A}$ i cui elementi sono gli amici di Anna è un sottoinsieme di $A \cap S$, cioè $\forall a \in \mathcal{A}, a \in S \cap A$.
L'affermazione di Bianca è la negazione di questa, cioè $\exists a \in \mathcal{A}, a \notin S \cap A$ cioè $\exists a \in \mathcal{A}, a \in (S \cap A)^c = A^c \cup S^c$ cioè che tra gli amici di Anna ve ne è almeno uno che è o non affidabile o non sincero.(Si è indicato con X^c il complementare dell'insieme X.)

Esercizio 3. (4 punti) Dire quante sono le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ dell'equazione

$$e^z = i$$

che sono nel quadrato $Q = \{[-4\pi, 4\pi] \times [-4\pi, 4\pi]\}$ e quante quelle che sono nel disco D aperto di centro $(2, 2)$ e raggio 1.
SOLUZIONE. Il numero delle soluzioni nel quadrato Q è 4 e nel disco D è 0
perché le soluzioni complesse dell'equazione data sono i numeri complessi del tipo $\{(\frac{\pi}{2}+2k\pi\}i$ e di questi solo 4 cadono nel quadrato, precisamente quelli che si ottengono per i valori di $k = 0, 1, -1, -2$. Essendo tutte le soluzioni sull'asse delle y e non intersecando il disco tale asse nessuna di queste soluzioni è nel disco.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la funzione f da $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f = |x+2| + |x-2| - (|x+1| + |x-1|)$$

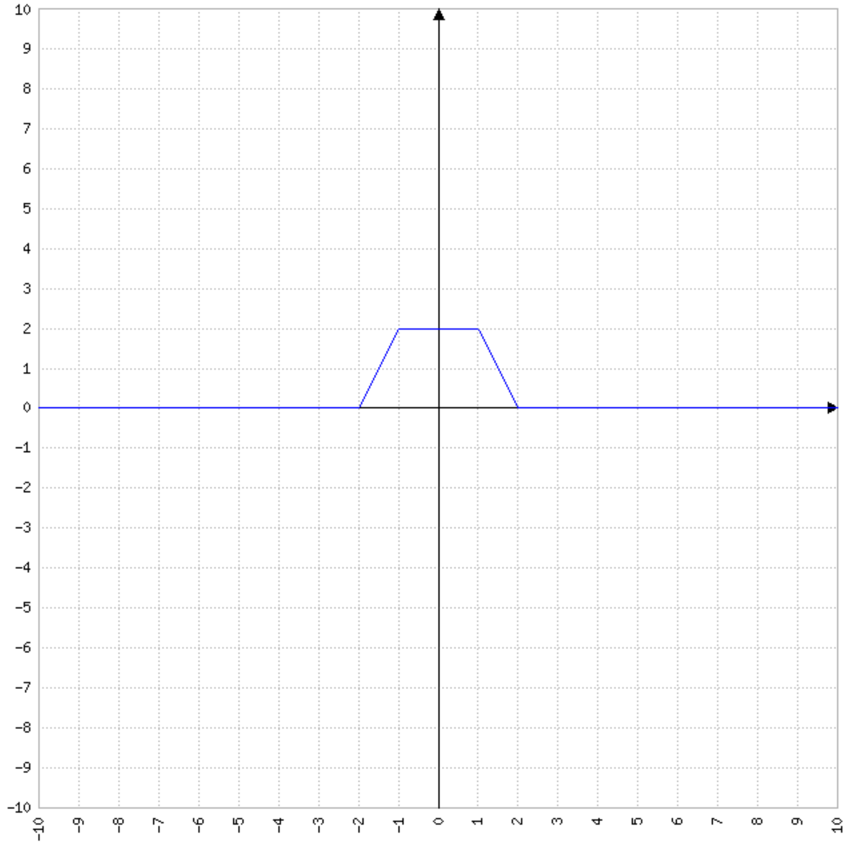
Determinare (se esistono):

(1) L'insieme dei punti C di $\mathbf{R}$ dove la funzione f è continua.
(2) L'insieme dei punti D di $\mathbf{R}$ dove la funzione f è differenziabile.
(3) I punti di minimo e massimo locale della funzione f.
(4) I punti di minimo e massimo assoluto della funzione f.
(5) Gli asintoti del grafico della funzione f.
(6) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $a_n = \int_0^n f(x)dx$. Dire se esiste finito $\lim_{n\to\infty} a_n$.

SOLUZIONE.

- $C = \mathbf{R}$
- $D = \mathbf{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$
- I punti di minimo locale sono i punti dell'insieme $(-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$
- I punti di massimo locale sono i punti dell'insieme $(-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup (2, +\infty)$
- I punti di minimo assoluto sono i punti $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- I punti di massimo assoluto sono i punti $[-1, 1]$
- Il grafico della funzione ammette la retta $y = 0$ come asintoto.
- La funzione per $n \geq 2$ vale 0, pertanto per $n \geq 2$ abbiamo che $a_n = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^n f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$. Quindi il limite esiste e vale $a_2 = \int_0^2 f(x)dx$. Tale valore è finito e questo si può vedere sia ricorrendo alla definizione di integrale definito come area del sottografico della funzione, sia calcolandolo esplicitamente. $a_2 = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 2dx + \int_1^2 (4 - 2x)dx = 3$

Al fine di rendere più chiara la situazione abbiamo aggiunto il grafico dell'andamento della funzione f.



Esercizio 2. (8 punti)
Si provi che per ogni $a \geq 1$ l'equazione

$$\tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) - \frac{ax-1}{x(x-2)} = 0$$

ammette almeno una soluzione nell'intervallo $(0,2)$.

SOLUZIONE. Si osservi che $\lim_{x\to 0^+} \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) = -\infty$ e che, essendo $a > 1$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{ax-1}{x(x-2)} = +\infty$ quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) - \frac{ax-1}{x(x-2)} \right) = -\infty.$$

Analogamente si ha che $\lim_{x\to 2^-} \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) = +\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} \frac{ax-1}{x(x-2)} = -\infty$ da cui

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) - \frac{ax-1}{x(x-2)} \right) = +\infty.$$

Quindi esistono punti H e K nell'intervallo $(0,2)$ ove la funzione $f = \tan(\frac{\pi}{2}(x+1)) - \frac{ax-1}{x(x-2)}$ è negativa e positiva, cioè $f(H) < 0$ e $f(K) > 0$. Quindi essendo la funzione f continua in questo intervallo deve esistere, per il teorema dei valori intermedi, un punto in cui si annulla.

Esercizio 3. (8 punti)
Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' + y = \cos x$$

tale che $y(0) = 0$

SOLUZIONE. È immediato che la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è del tipo $y = Ce^{-x}$. Per il calcolo di una soluzione particolare, mantenendo le notazioni della dispensa EQUADIFF1, ci si riconduce al calcolo dell'integrale $\int e^x \cos x dx$.
Applicando due volte l'integrazione per parti si ottiene

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

da cui $\int e^x \cos x dx = e^x \dfrac{\cos x + \sin x}{2}$.
Pertanto l'integrale del problema proposto è

$$ce^{-x} + e^{-x}\left(e^x \frac{\cos x + \sin x}{2}\right) = ce^{-x} + \frac{\cos x + \sin x}{2}.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = -\dfrac{1}{2}$. Quindi soluzione del problema differenziale proposto è

$$-\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{\cos x + \sin x}{2}$$

.