

Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO B 25 Febbraio 2016

COGNOME NOME

MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali positivi per cui esistano m e M tali che per ogni n si abbia $0 < m \leq a_n \leq M$. Dire se esiste $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ esiste ed in caso affermativo calcolarlo.

SOLUZIONE

Il limite L non esiste

Il limite L esiste e vale 1

perché per ogni n si ha $0 < m \leq a_n \leq M$; ne segue che $\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{M}$, da cui per il teorema del confronto si ha

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1$$

Esercizio 2. (4 punti)

Sia $P(k) = 2 + 4 + \dots + 2k$ la somma dei primi k numeri pari. Provare per induzione che $P(k) = k^2 + k$

SOLUZIONE.

$P(1) = 2$. Supponiamo vera la proposizione per $k - 1$, cioè $P(k - 1) = (k - 1)^2 + (k - 1)$ e deduciamone $P(k)$.

$$P(k) = 2 + 4 + \dots + (2k - 2) + 2k = (k - 1)^2 + (k - 1) + 2k = k^2 - 2k + 1k - 1 + 2k = k^2 + k.$$

Esercizio 3. (3 punti)

Sia $p(x)$ una funzione polinomiale. Si caloli il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)e^x$$

SOLUZIONE.

□ Il limite non esiste

ⓧ Il limite esiste e vale 0

perché essendo un polinomio una somma finita di termini del tipo ax^m è sufficiente mostrare che $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^m e^x = 0$ per ogni m , e questo si ottiene immediatamente con successive applicazioni della regola dell'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^m e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^m}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^{m-1}}{-e^{-x}} = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m!}{(-1)^m e^{-x}} = 0.$$

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (6 punti) Sia $p(x)$ una funzione polinomiale di grado d . Sapendo che $\int p(x)e^{mx} = q(x)e^{mx} + \mathbf{R}$ ove $q(x)$ è una funzione polinomiale, dimostrare che il grado del polinomio $q(x)$ è uguale al grado d del polinomio $p(x)$.

SOLUZIONE.

Se $q(x)e^{mx} + c$ è una primitiva della funzione $p(x)e^{mx}$ si ha

$$\frac{dq(x)e^{mx}}{dx} = q'e^{mx} + mqe^{mx} = e^{mx}(q' + mq) = p(x)e^{mx}$$

da cui $(q' + mq) = p(x)$. Essendo il grado di q' strettamente minore di quello di q si ha che il polinomio $q' + mq$ ha grado uguale a quello di q che quindi deve essere quello di p . Il risultato si poteva ottenere in molti altri modi, ad esempio considerando il processo di integrazione per parti descritto nella dispensa P-ELEMENTARI pag 1 e procedendo per induzione o impostando un sistema lineare nelle incognite *coefficienti del polinomio* q .

Esercizio 2. (8 punti)

Si consideri la formula $f(x) = \max(\frac{1}{2}, \cos x)$.

- (1) Si indichi il più grande sottoinsieme $C \subset \mathbf{R}$ per cui la formula definisce una funzione continua da C a \mathbf{R} .
- (2) Si indichi il più grande sottoinsieme $D \subset \mathbf{R}$ per cui la formula definisce una funzione differenziabile da C a \mathbf{R} .
- (3) Si descrivano gli insiemi MA dei massimi assoluti e mA dei minimi assoluti della funzione f .
- (4) Si descrivano gli insiemi MR dei massimi relativi e mR dei minimi relativi della funzione f .
- (5) Si discuta la presenza di eventuali asintoti per il grafico della funzione

SOLUZIONE.

- (1) $C = \mathbf{R}$. Le funzioni $\frac{1}{2}$ e $\cos x$ sono funzioni continue su tutto \mathbf{R} e \max è una procedura che conserva la continuità. (Disp C-ELEMENTARI pag. 1)
- (2) Nei punti del chiuso $X = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\} \cup \{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\}$ (con $k \in \mathbf{Z}$) la funzione non è differenziabile poichè in questi punti il limite del rapporto incrementale non esiste (limite destro \neq limite sinistro). Nei punti del complementare, cioè dell'aperto $\mathbf{R} \setminus X$ la funzione coincide con una funzione differenziabile (o $\frac{1}{2}$ o $\cos x$) e quindi è differenziabile.
- (3) L'insieme MA dei massimi assoluti è l'insieme $\{2k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}}$, dove la funzione vale 1, L'insieme mA dei minimi assoluti è l'insieme $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$ (con $k \in \mathbf{Z}$), dove la funzione vale $\frac{1}{2}$.
- (4) L'insieme MR dei massimi relativi è l'insieme $MA \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$.

L'insieme mR dei minimi relativi coincide con l'insieme $mA = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$.

- (5) Il grafico della funzione non presenta asintoti verticali poichè è una funzione limitata; non presenta asintoti obliqui (o orizzontali) poichè non esistono il $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ e il $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Esercizio 3. (3 punti)

Si descriva l'insieme delle soluzioni della seguente equazione

$$e^{2z} + 2i = 0$$

SOLUZIONE.

$$-2i = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

Ricordando che $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ otteniamo

$$2x = \ln 2 \text{ e } 2y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ per cui le soluzioni sono i numeri complessi della forma}$$

$$\ln \sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi i + k\pi i \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

Esercizio 4. (7 punti)

Si consideri l'equazione differenziale al primo ordine

$$(t^4 + 4)y' = 2t$$

- (1) Si dica se ha soluzioni costanti
- (2) Si determini se esiste una soluzione tale che $y(0) = 2$

SOLUZIONE.

- (1) L'equazione non ha soluzioni $y(t) = cost$, poiché in tal caso si avrebbe $y'(t) = 0$ che è incompatibile con l'equazione proposta.
- (2) L'equazione proposta è a variabili separate, per cui, separando appunto le variabili, si ottiene

$$\int dy = \int \frac{2t}{t^4 + 4} dt \text{ da cui } y(t) = \frac{1}{2} \arctan \frac{t^2}{2} + c$$

$$\text{Poichè } c = \arctan(0) \text{ otteniamo la soluzione } y(t) = \frac{1}{2} \arctan \frac{t^2}{2} + 2.$$