Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO B 22 Febbraio 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni.

Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 19$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v/30$, *dove* $v = \min(28, x + y)$.

2. Parte 1.

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1 (2 punti) Dire se esiste in $\overline{\mathbf{R}}$ il limite della seguente successione e, nel caso, calcolarlo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n+2}}.$$

$\boxed{\texttt{x}}$ `SI Il limite esiste e vale` $L = +\infty$. `Infatti`

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+7} + \sqrt{n+2}}{5} = +\infty$$

☐`NO Il limite non esiste`

Esercizio 2 (8 punti) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x^4} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(1) Determinare il sottoinsieme D dei punti di $\mathbf{R}$ in cui f è derivabile.
(2) Discutere se la funzione f è iniettiva.
(3) Discutere se la funzione $f(x)$ ha un punto di minimo relativo nell'intervallo $(-1, 1)$.
(4) Determinare l'insieme di definizione E della funzione $g(x) = \log f(x)$
(5) Determinare l'insieme $F = \{x \in \mathbf{R} : g(x) < 0\}$.
(6) Calcolare $I = \displaystyle\int_1^2 g(x)dx$

---

(1) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Infatti $f(x) = |x| = -x$ se $x < 0$ e $f(x) = x^2$ se $x \geq 0$. Sulle due semirette di $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ la derivata vale rispettivamente $f'(x) = -1$ e $f'(x) = 2x$. Non è derivabile in 0 perché non esiste il limite del rapporto incrementale $\dfrac{f(x)}{x}$ per $x \to 0$ (il limite sinistro è -1, quello destro è 0).

(2) $\boxed{\text{x}}$ NO la funzione non è iniettiva perché per esempio $f(-1) = f(1)$

$\square$SI la funzione è iniettiva perché

(3) $\square$NO f non ha punti di minimo relativo in quell'intervallo perché

$\boxed{\text{x}}$ SI f ha punti di minimo relativo in quell'intervallo. Infatti $x = 0$ è un punto di minimo assoluto su $\mathbf{R}$ perché per ogni $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. e quindi, a maggior ragione, $x = 0$ è un punto di minimo relativo su $(-1, 1)$.

(4) $E = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ perché $\log(f(x))$ è definita sull'insieme dei punti in cui $f(x) > 0$,

(5) $F = (-1, 1) \setminus \{0\}$ perché $\log(f(x)) < 0$ se e solo se $0 < f(x) < 1$

(6) $I = \displaystyle\int_1^2 g(x)dx = 2\int_1^2 \log(x)dx = 2[x\log(x) - x]_1^2$

3. Parte 2.

Esercizio 1 (1 punto) Negare la seguente proposizione:
Tutti i ragazzi che hanno i capelli neri odiano Brad Pitt.

Esistono ragazzi con i capelli neri che non odiano Brad Pitt.

Esercizio 2 (3 punti) Siano A e B due insiemi finiti, $|A| = 5$, $|B| = 4$.

(1) Determinare il numero p delle funzioni $f : A \to B$ tali che $|f(A)| = 1$.
(2) Determinare il numero q delle funzioni $f : A \to B$ tali che $|f(A)| \geq 2$.

(1) $p = 4$, infatti $|f(A)| = 1$ se e solo se f è costante; il numero di queste funzioni è uguale al numero degli elementi di B.
(2) $q = 4^5 - 4$. Infatti 4^5 è il numero di tutte le applicazioni definite su A a valori in B. Le applicazioni aventi $|f(A)| \geq 2$ formano l'insieme complementare di quelle tali che $|f(A)| = 1$.

Esercizio 3 (8 punti)

(1) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x^4 + 2x^3 + x^2)}{(x^2 - 1)}}$$

definisce una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.

(2) Determinare gli asintoti di $f : D \to \mathbf{R}$.

> (1) $D = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$ in quanto è il sottoinsieme di $\mathbf{R}$ tale che il denominatore dell'espressione sotto radice è non nullo e questa espressione è ≥ 0.
> (2) Le seguenti rette sono asintoti
> $x = 1$, $y = x + 1$, $y = -x - 1$ perché
> - la retta $x = 1$ è l'unico asintoto verticale.
> - Le rette $y = x + 1$, $y = -x - 1$ sono due asintoti obliqui, rispettivamente il primo per $x \to +\infty$ e il secondo per $x \to -\infty$

Si osservi che su $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ la funzione può essere scritta in modo più semplice nella forma $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Esercizio 4 (4 punti) Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ due funzioni continue tali che $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $g(0) = 1/2$ e $g(1) = 1/2$. Dimostrare che esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $f(a) = g(a)$.

> La funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ è continua e verifica la condizione $h(0)h(1) < 0$. Applicando il teorema degli zeri alla restrizione di h sull'intervallo $[0, 1]$, concludiamo che esiste $a \in [0, 1] \subset \mathbf{R}$ tale che $h(a) = f(a) - g(a) = 0$.

Esercizio 5 (8 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y" + y' + ay = 0$$

che varia al variare del parametro reale a.

(1) Determinare la soluzione generale dell'equazione per ogni valore del parametro a.

(2) Per $a = 1/4$ determinare se esiste una soluzione che verifichi $y(0) = 0$ e $\int_0^1 y(x)dx = 1$.

(1) Per ogni valore del parametro a, si tratta di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti del secondo ordine. Il polinomio caratteristico (che dipende dal parametro a) è $p(X) = X^2 + X + a$. Il suo discriminante è $\Delta = 1 - 4a$.

Il comportamento delle soluzioni dipende dal segno di Δ.

- $\Delta > 0$ se e solo se $a < 1/4$. In tal caso ci sono due radici reali distinte $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ e la soluzione generale dell'equazione differenziale è
$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$
dove c_1 e c_2 sono due parametri reali.
- $\Delta = 0$ se e solo se $a = 1/4$. In tal caso $\lambda = -1/2$ è radice doppia e la soluzione generale dell'equazione differenziale è
$$y(t) = c_1 e^{-(1/2)t} + c_2 t e^{-(1/2)t} \quad .$$
- $\Delta < 0$ se e solo se $a > 1/4$. In tal caso ci sono due radici complesse coniugate: $\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{4a-1}}{2} = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \frac{-1 - i\sqrt{4a-1}}{2} = \alpha - i\beta$. La soluzione generale dell'equazione differenziale in tal caso è
$$(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t) e^{\alpha t} \quad .$$

(2) Per $a = 1/4$ abbiamo visto che $\Delta = 0$ e che la soluzione generale è $y(t) = c_1 e^{-(1/2)t} + c_2 t e^{-(1/2)t}$. Imponendo la condizione $y(0) = 0$ determiniamo che $c_1 = 0$. Imponiamo infine che $\int_0^1 c_2 t e^{-(1/2)t} dt = 1$. Integrando per parti si determina infine che $c_2 = \frac{1}{4 - 6e^{-(1/2)}}$.