

Analisi I
21 Luglio 2018

COMPITO B

COGNOME NOME
MATRICOLA..... VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 0. (punti 0) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (punti 3) Dire se il grafico della funzione

$$f(x) = \log(1 + e^{2x})$$

ammette o meno asintoti.

SOLUZIONE.

Il grafico della funzione ammette le seguenti rette come asintoti

Il grafico della funzione non ammette asintoti.

Giustificazione.

Esercizio 2. (punti 3)

Discutere, usando il principio di induzione, se per ogni $n \geq 1$

$$3^n \leq (n + 2)!$$

SOLUZIONE.

Esercizio 3. (punti 4) Descrivere, motivando la risposta, i seguenti sottoinsiemi della retta reale dicendo per ognuno di essi se è un intervallo, se è limitato e, nel caso sia un intervallo, se gli estremi vi appartengono.

$$X_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists t \in \mathbf{R} \text{ tale che } (t^2 + 4)x = t^2\}$$

$$X_- = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists t \in \mathbf{R} \text{ tale che } (t^2 - 4)x = t^2\}$$

SOLUZIONE.

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (punti 6)

- (1) Determinare il più grande sottoinsieme C di \mathbf{R} in cui la formula

$$f(x) = \left(x - n - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ se } x \in [n, n + 1], n \in \mathbb{N}$$

definisce una funzione continua.

- (2) Determinare il più grande sottoinsieme aperto D di C in cui f sia derivabile.
(3) Determinare, se esistono, punti di minimo e massimo locali di f .
(4) Determinare, se esistono, punti di minimo e massimo assoluti di f .
(5) Calcolare l'area del sottografico nell'intervallo $[0, 5]$

SOLUZIONE.

- (1) $C =$

- (2) $D =$

- (3)

- (4)

- (5)

Esercizio 2. (punti 6)

Si studi, nel suo insieme di definizione, la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

e se ne tracci un grafico approssimativo.

SOLUZIONE.

Esercizio 3. (punti 6)

Determinare quanti numeri complessi nel quadrato del piano complesso di centro l'origine e con un vertice nel punto $8 + 8i$ sono tali che $e^z = e^3$.

SOLUZIONE.

Esercizio 4. (punti 6) Calcolare l'integrale dell'equazione differenziale

$$x'' - 4x' + 3x = e^x$$

che in 0 vale 0 e la cui derivata in 0 vale 1

SOLUZIONE.