

Analisi I - IngBM - 2015-16
COMPITO B 20 Settembre 2016

COGNOME NOME

MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. I PARTE

Esercizio 0. (0 punti.) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti.)

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{2x} - 3 - 6x - 6x^2}{x^3}$$

SOLUZIONE

- il limite vale 4.
 il limite non esiste

Giustificazione.

Si perviene a questo risultato o con ripetute applicazioni della regola dell'Hospital o osservando che, utilizzando il polinomio di Taylor, si ha, vicino a 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$ ove ϵx è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$, e quindi che $3e^{2x} - 3 - 6x - 6x^2 = \frac{3 \cdot 8}{3!}x^3 + x^3\epsilon x$. Quindi il limite esiste e vale 4.

Esercizio 2. (4 punti.) Sia $\{a_n\}$ con $n \geq 0$, una successione di numeri reali e a un numero reale.

- (1) Dire quali delle espressioni seguenti esprime il fatto che a è il limite della successione $\{a_n\}$ per $n \rightarrow \infty$.
- (2) Dire quali delle espressioni seguenti esprime il fatto che a **non** è il limite della successione $\{a_n\}$ per $n \rightarrow \infty$.
 - a) $\exists \varepsilon$ tale che $\forall \bar{n} \exists n \geq \bar{n}$ tale che $|a_n - a| > \varepsilon$
 - b) $\forall \varepsilon \exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - a| > \varepsilon$
 - c) $\forall \varepsilon \exists \bar{n}$ e $\exists n \geq \bar{n}$ tale che $|a_n - a| < \varepsilon$
 - d) $\forall \varepsilon \exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - a| < \varepsilon$
 - e) $\exists \varepsilon \exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - a| < \varepsilon$

SOLUZIONE

- (1) L'espressione che esprime il fatto che a è il limite della successione $\{a_n\}$
 - è quella contrassegnata con la lettera d
 - non è nessuna di quelle proposte.
- (2) L'espressione che esprime il fatto che a **non** è il limite della successione $\{a_n\}$
 - è quella contrassegnata con la lettera a
 - non è nessuna di quelle proposte.

Esercizio 3. (3 punti.) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \sin(\log(\cos^2(x) + 1))$$

SOLUZIONE

La derivata della funzione proposta è

$$f(x) = -\cos(\log(\cos^2(x) + 1)) \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2(x) + 1}$$

3. II PARTE.

Esercizio 1. (9 punti.)

Si consideri la funzione $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita dalla formula $f(x) = \begin{cases} \log(1 + 2x^2) & \text{se } x \leq 0 \\ |\log x| & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- (1) Descrivere l'insieme C dei punti di \mathbf{R} dove la funzione è continua e l'insieme D dei punti dove la funzione è derivabile.
- (2) Descrivere l'insieme M e m rispettivamente dei punti di massimo e minimo locali della funzione $f(x)$.
- (3) Descrivere gli eventuali asintoti.

SOLUZIONE

$$(1) C = \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

$$D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$(2) M = \emptyset$$

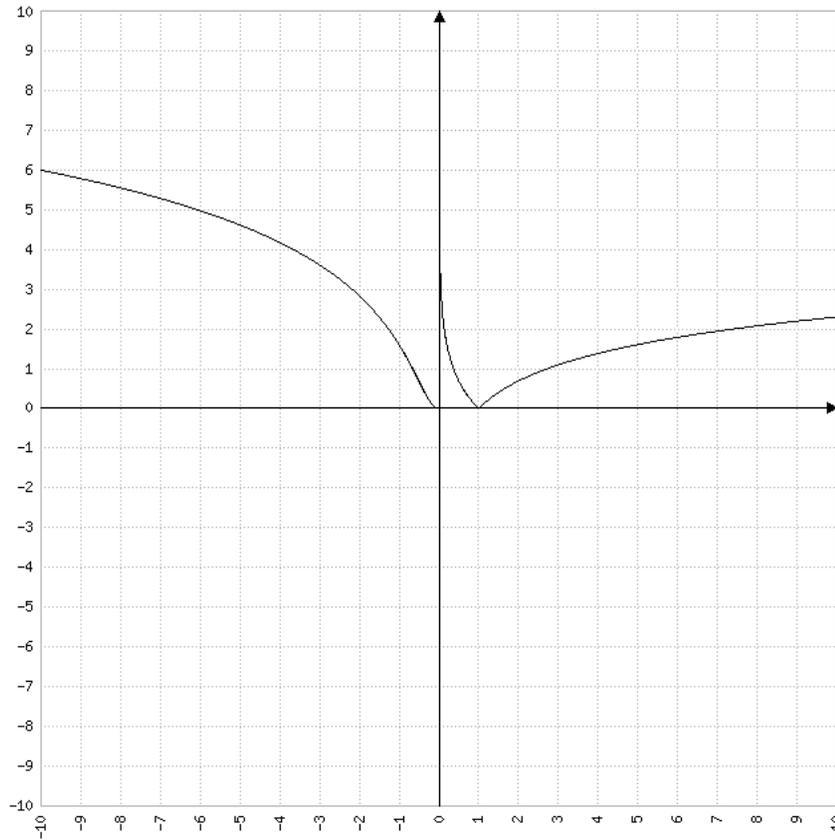
$$m = \{0, 1\}$$

- (3) l'asse delle y è un asintoto verticale.

il grafico della funzione non ammette asintoti.

Giustificazioni. Per i punti di minimo e massimo locale si osservi che la funzione al di fuori dei punti 0 e 1 è derivabile. La derivata nell'intervallo $(-\infty, 0)$ vale $\frac{4x}{1+2x^2}$, quindi è negativa pertanto la funzione in tale intervallo è monotona decrescente: in particolare in un intorno sinistro di 0 si ha $f(0) < f(x)$. Per gli intervalli destri di 0 si osservi che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ e quindi in un intervallo destro di 0 si ha $f(0) < f(x)$. Da ciò risulta che 0 è un punto di minimo locale. Analogamente nel punto 1 la derivata della funzione a sinistra di 1 risulta negativa ($f(x) = -\log x$, $f'(x) = -\frac{1}{x}$) e a destra positiva ($f(x) = \log x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$), da cui si deduce che 1 è un punto di minimo locale. Negli altri punti del dominio la funzione, come si è detto, è derivabile e lo studio della derivata esclude la presenza di altri punti di minimo relativo o di punti di massimo relativo.

Il comportamento della funzione è riassunto nel grafico sottostante



Esercizio 2. (5 punti.)

Provare per induzione che $n(n^2 + 5)$ è divisibile per 6 per ogni $n \geq 0$.

SOLUZIONE

- *Passo iniziale.* Per $n = 0$ e $n = 1$ la cosa è di immediata verifica.
- *Passo induttivo.* Mostriamo che la veridicità dell'affermazione per n implica quella per $n + 1$.

$$(n + 1)((n + 1)^2 + 5) = n(n^2 + 5) + 3n(n + 1) + 6$$

e ogni singolo termine di questa somma è divisibile per 6: il primo per il passo induttivo, il secondo perché $n(n + 1)$ è il prodotto di un pari per un dispari e quindi divisibile per 2 e il terzo per ovvie ragioni.

Esercizio 3. (6 punti.) Calcolare

$$\int \frac{2 + 3x + x^2}{x(x^2 + 1)} dx$$

SOLUZIONE

Con i metodi usuali la funzione razionale proposta può essere scritta

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2}{x} - \frac{x - 3}{x^2 + 1} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{3}{x^2 + 1}$$

Quindi

$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)} dx = 2 \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - 3 \arctan(x) + c$$

Esercizio 4. (4 punti.)

Provare che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$$

SOLUZIONE

Un modo per provare la cosa è ricordare che se $z = x + iy$ si ha $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Pertanto essendo $\bar{z} = x - iy$ risulta

$$e^{\bar{z}} = e^x(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^x(\cos(y) - i \sin(y)) = \overline{e^z}.$$