Analisi I - IngBM - 2015-16
COMPITO A 20 Settembre 2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*
Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. I parte

Esercizio 0. (0 punti.) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti.)
Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} - 2 - 2x^2 - x^4}{x^6}$$

SOLUZIONE

- [x] il limite vale $\frac{1}{3}$.
- [ ] il limite non esiste

Giustificazione.
Si perviene a questo risultato o con ripetute applicazioni della regola dell'Hospital o osservando che, utilizzando il polinomio di Taylor, si ha, vicino a 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)$ ove ϵx è un infinitesimo per $x \to 0$, e quindi che $2e^{x^2} - 2 - 2x^2 - x^4 = \frac{2}{3!}x^6 + x^6\epsilon x$.
Quindi il limite esiste e vale $\frac{1}{3}$.

Esercizio 2. (4 punti.) Sia $\{a_n\}$ con $n \geq 0$, una successione di numeri reali e a un numero reale.

(1) Dire quali delle espressioni seguenti esprime il fatto che a **è** il limite della successione $\{a_n\}$ per $n \to \infty$.
(2) Dire quali delle espressioni seguenti esprime il fatto che a **non è** il limite della successione $\{a_n\}$ per $n \to \infty$.

a) $\exists \varepsilon\ \exists \overline{n}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}$ si ha $|a_n - a| < \varepsilon$
b) $\forall \varepsilon\ \exists \overline{n}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}$ si ha $|a_n - a| < \varepsilon$
c) $\forall \varepsilon\ \exists \overline{n}$ e $\exists n \geq \overline{n}$ tale che $|a_n - a| < \varepsilon$
d) $\forall \varepsilon\ \exists \overline{n}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}$ si ha $|a_n - a| > \varepsilon$
e) $\exists \varepsilon$ tale che $\forall \overline{n}\ \exists n \geq \overline{n}$ tale che $|a_n - a| > \varepsilon$

SOLUZIONE

(1) L'espressione che esprime il fatto che a **è** il limite della successione $\{a_n\}$
   - [x] è quella contrassegnata con la lettera b
   - [ ] non è nessuna di quelle proposte.

(2) L'espressione che esprime il fatto che a **non è** il limite della successione $\{a_n\}$
   - [x] è quella contrassegnata con la lettera e
   - [ ] non è nessuna di quelle proposte.

Esercizio 3. (3 punti.) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \cos(\log(\sin^2(x) + 1))$$

SOLUZIONE

La derivata della funzione proposta è

$$-\sin(\log(\sin^2(x) + 1)) \cdot \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x) + 1}$$

3. II parte.

Esercizio 1. (9 punti.)

Si consideri la funzione $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita dalla formula $f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2) & \text{se } x \le 0 \\ |\log x| & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(1) Descrivere l'insieme C dei punti di $\mathbf{R}$ dove la funzione è continua e l'insieme D dei punti dove la funzione è derivabile.
(2) Descrivere l'insieme M e m rispettivamente dei punti di massimo e minimo locali della funzione $f(x)$.
(3) Descrivere gli eventuali asintoti.

SOLUZIONE

(1) C= $\mathbf{R} - \{0\}$

D= $\mathbf{R} - \{0, 1\}$

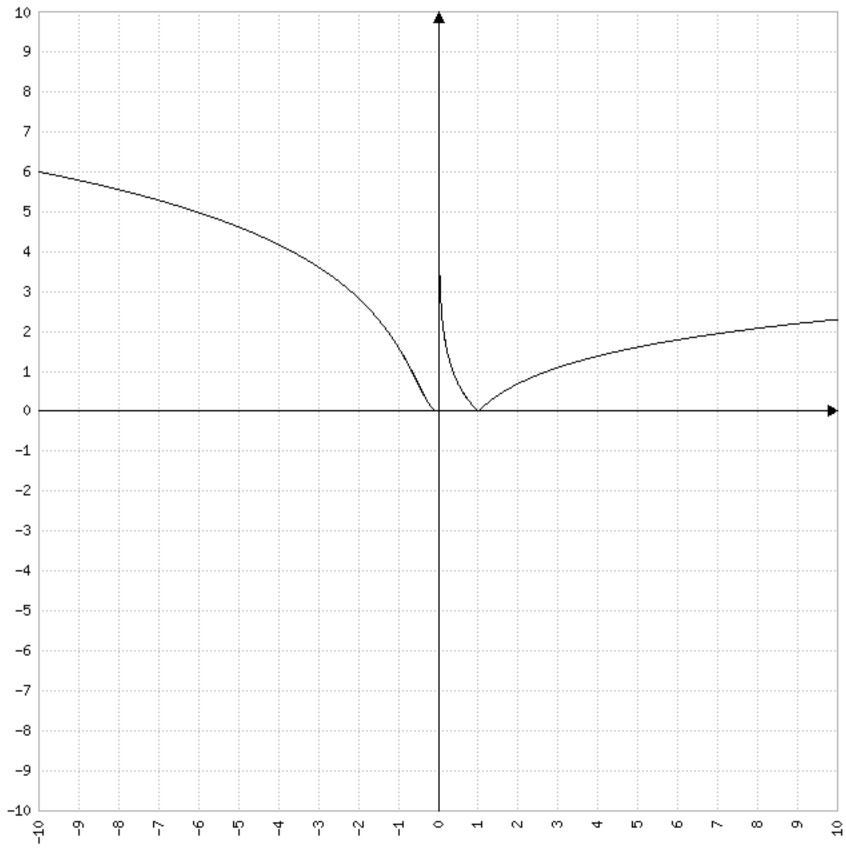
(2) M= $\emptyset$

m= $\{0, 1\}$

(3) $\boxed{\text{x}}$ l'asse delle y è un asintoto verticale.

$\boxed{}$ il grafico della funzione non ammette asintoti.

Giustificazioni. Per i punti di minimo e massimo locale si osservi che la funzione al di fuori dei punti 0 e 1 è derivabile. La derivata nell'intervallo $(-\infty, 0)$ vale $\dfrac{2x}{1+x^2}$, quindi è negativa pertanto la funzione in tale intervallo è monotona decrescente: in particolare in un intorno sinistro di 0 si ha $f(0) < f(x)$. Per gli intervalli destri di 0 si osservi che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e quindi in un intervallo destro di 0 si ha $f(0) < f(x)$. Da ciò risulta che 0 è un punto di minimo locale. Analogamente nel punto 1 la derivata della funzione a sinistra di 1 risulta negativa ($f(x) = -\log x,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x}$) e a destra positiva ($f(x) = \log x,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$), da cui si deduce che 1 è un punto di minimo locale. Negli altri punti del dominio la funzione, come si è detto, è derivabile e lo studio della derivata esclude la presenza di altri punti di minimo relativo o di punti di massimo relativo.
Il comportamento della funzione è riassunto nel grafico sottostante



Esercizio 2. (5 punti.)
Provare per induzione che $n(n^2+5)$ è divisiblile per 6 per ogni $n \geq 0$.
SOLUZIONE

- *Passo iniziale.*Per $n = 0$ e $n = 1$ la cosa è di immediata verifica.
- *Passo induttivo.*Mostriamo che la veridicità dell'affermazione per n implica quella per $n+1$.

$$(n+1)((n+1)^2+5) = n(n^2+5) + 3n(n+1) + 6$$

e ogni singolo termine di questa somma è divisibile per 6: il primo per il passo induttivo, il secondo perché $n(n+1)$ è il prodotto di un pari per un dispari e quindi divisibile per 2 e il terzo per ovvie ragioni.

Esercizio 3. (4 punti.)
Provare che per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^{z}}$$

SOLUZIONE
Un modo per provare la cosa è ricordare che se $z = x+iy$ si ha $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
Pertanto essendo $\overline{z} = x - iy$ risulta

$$e^{\overline{z}} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x(\cos(y) - i\sin(y)) = \overline{e^z}.$$

Esercizio 4. (6 punti.) Calcolare

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}dx$$

SOLUZIONE Con i metodi usuali la funzione razionale proposta può essere scritta

$$\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{x-3}{x^2+1} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}$$

Quindi

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}dx = 2\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 3\arctan(x) + c$$