Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO B 26 Luglio 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0.(0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3 punti) Sia a_n una successione tale che $1 < |a_n| < 3$ per ogni $n \geq 0$. Dire se esiste il limite L della successione $b_n = \dfrac{a_n}{n + a_n}$ per $n \to +\infty$, e nel caso affermativo calcolarlo.
SOLUZIONE.
□Il limite L non esiste perché

□Il limite L esiste e vale perché

Esercizio 2.(4 punti) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-9}dx$

SOLUZIONE.

$I =$ perché

Esercizio 3.(3 punti)

(1) Sia $z = a + ib \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$. Sia $p + iq = \dfrac{z-1}{z}$ Dimostrare che $b > 0$ se e solo se $q > 0$.

(2) Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z|z| - z^2 = 0 \ .$$

SOLUZIONE.

(1)

(2) Le soluzioni complesse dell'equazione sono

3. Seconda parte

Esercizio 1.(10 punti)

a) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = \dfrac{\log(x^2)}{\log(x^2)+1}$ definisca una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.

b) Determinare il sottoinsieme $\bar{D} \subset \mathbf{R}$ formato dai punti di accumulazione dell'insieme D.

c) Giustificare che f è derivabile su D. Determinare il più grande sottoinsieme $D' \subset \mathbf{R}$ tale che $D \subset D'$ ed esiste $F : D' \to \mathbf{R}$ continua tale che la restrizione di F su D coincide con f.

d) Dire se F è derivabile su D'.

(e) Calcolare gli eventuali asintoti del grafico della funzione F

e) Tracciare un grafico qualitativo della funzione F.

SOLUZIONE.

a) $D =$ b) $\bar{D} =$

c) □SI f è derivabile su D □NO f non è derivabile su D
perché

$D' =$ $F =$

d) □SI F è derivabile su D' □NO F non è derivabile su D'
perché

e) □Il grafico di F non ammette asintoti
□Gli asintoti del grafico di F sono le rette

f) Grafico qualitativo di F

Esercizio 4.(3 punti) Sia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Sia $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$G(x) = \int_1^x h(t)dt \ .$$

Supponiamo che esista $x_0 \neq 1$ tale che $G(x_0) = 0$. Dimostrare che esiste $t_0 \in \mathbf{R}$ tale che $h(t_0) = 0$.
SOLUZIONE.

Esercizio 4.(3 punti) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione periodica non costante, Dire se esistono i due seguenti limiti, ed in caso affermativo calcolarli,

$$L_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1} \qquad L_2 = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1} \right)$$

giustificando il risultato ottenuto.
SOLUZIONE.

☐Il limite L_1 non esiste perché

☐Il limite L_1 esiste e vale

☐Il limite L_2 non esiste perché

☐Il limite L_2 esiste e vale

Esercizio 5.(8 punti)
Determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

e la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 13y = xe^x$$

tale che $y(0) = y'(0) = 0$

SOLUZIONE