Analisi I - IngBM - 2015-16
COMPITO A 18 Giugno 2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.
Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3,5 punti) Dire se la formula seguente

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1,1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

definisce una funzione differenziabile da $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

SOLUZIONE.

☐ SI la funzione $f(x)$ è una funzione differenziabile da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$

$\boxed{\text{X}}$ NO la funzione $f(x)$ non è una funzione differenziabile da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$

perché la funzione definita non è continua in 0.In effetti risulta $f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$.

Esercizio 2.(3 punti)
Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{n^2}$$

SOLUZIONE.

$\square$ NO il limite non esiste $\boxed{\text{X}}$ SI il limite esiste e vale $e^{\frac{1}{3}}$

perché $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ e quindi (cfr. dispensa LIMSUCC)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} = e.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{\frac{3n^2}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

Esercizio 3. (3.5 punti) Negare le seguenti frasi

(1) *Tutti i gatti sono vegani e nessun cane lo è.*
(2) *C'e' almeno un asino carnivoro o almeno un pesce erbivoro.*

SOLUZIONE.

(1) La negazione della frase (1) è
    C'è almeno un gatto non vegano o un cane che non lo è.
(2) La negazione della frase (2) è
    Tutti gli asini non sono carnivori e tutti i pesci non sono erbivori.

Seconda parte

Esercizio 1.(6 punti)

Si consideri la funzione definita dalla formula $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{se } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ e^{x+1} + 1 - e^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

(1) Descrivere l'insieme C dei punti di $\mathbf{R}$ dove la funzione è continua e l'insieme D dei punti dove la funzione è derivabile
(2) Descrivere l'insieme dei punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x)$
(3) Descrivere gli eventuali asintoti

SOLUZIONE.

(1) $C = \mathbf{R}$ e $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
(2) La funzione ha un minimo relativo in -1 e un massimo relativo in 0 e non ha massimi o minimi assoluti.
(3) Il grafico della funzione ha la retta $y = 0$ come asintoto orizzontale e non ammette altri asintoti.

Esercizio 2. (6 punti) Sapendo che $1 + i$ è una soluzione dell'equazione

$$z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = 0$$

calcolarne tutte le altre.

SOLUZIONE.

Essendo il polinomio a coefficienti reali anche $1 - i$ è soluzione e quindi il polinomio risulta divisibile per $(z-1+i)(z-1-i) = z^2 - 2z + 2$. In effetti si ha $z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2z + 5)$. Pertanto le soluzioni dell'equazione proposta sono $\{1 + 1, 1 - i, 1 + 2i, 1 - 2i\}$.

Esercizio 3.(6 punti)

Sia f una funzione continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.Provare che f non è surgettiva.

SOLUZIONE.

Poiché la funzione tende a $+\infty$ sia per $x \to \infty$ sia per $x \to -\infty$, fissato un $L > 0$ esiste un K per cui se $x < -K$ o $x > K$ si ha che $f(x) > L$. L'intervallo $I = [-K, K]$ è un intervallo chiuso e limitto, pertanto essendo la funzione f continua su tutto $\mathbf{R}$ ammetterà su I un massimo e un minimo assoluti risp M e N, quindi in definitiva la funzione $f(x)$ non assume mai valori minori di $\inf\{L, N\}$ e quindi non può essere surgettiva.

Esercizio 4. (6 punti)
Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$(\sin^2 x + 1)y' - \cos x = 0$$

tale che $y(0) = 0$.

SOLUZIONE.
L'equazione è a variabili separabili e risulta

$$y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}$$

da cui

$$y = \int_0^t \frac{d(\sin x)}{1 + \sin^2 x} = \arctan \sin(t) + C.$$

Osserviamo infine che per $t = 0$ si ha $\arctan 0 + C = 0$ da cui $C = 0$