Analisi I - IngBM - 2018-19
COMPITO B 16 Febbraio 2019

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA....................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(x)|}{x^2}$$

SOLUZIONE
Il limite
☐ Esiste e vale ☐ Non esiste
perché

Esercizio 2. (4 punti)
Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali definite per $n \geq 0$.
Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Sia c_n la successione definita da $c_{2n} = a_n, c_{2n+1} = b_n$. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

SOLUZIONE.

Esercizio 3. (3 punti) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = |\sin(x)|$.

(1) Determinare, se esiste, una primitiva $F(x)$ di $f(x)$.
(2) Nel caso esista, determinare il più grande $n \geq 0$ tale che $F(x)$ sia di classe $\mathcal{C}^n$ ma non di classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

SOLUZIONE.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (8 punti) Si considerino le funzioni $\sin(x), \cos(x)$ sull'intervallo $[0, \pi/2]$ e siano $\arcsin(x)$ e $\arccos(x)$ le rispettive funzioni inverse.

(1) Determinare il dominio D in cui la funzione $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$ è definita.
(2) Dimostrare che $f(x)$ è costante su D e determinarne il valore.

SOLUZIONE.
$D =$

$f(x)$ è costante e vale:

Esercizio 2. (5 punti) Indichiamo con *Arccotan* il ramo principale della funzione arcocotangente. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{Arccotan(t)} dt$

(1) Dimostrare che F è iniettiva.
(2) Dimostrare che F è surgettiva.
(3) Determinare il sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che per ogni $y \in D$ la funzione inversa F^{-1} è derivabile.
(4) Per ogni $y \in D$ determinare $(F^{-1})'(y)$.

SOLUZIONE

Esercizio 3. (5 punti)

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, si consideri il polinomio $p_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-x)^j = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$. Determinare, al variare di n, tutte le radici complesse di $p_n(x)$ specificando quali di esse sono reali.

SOLUZIONE

Esercizio 4. (6 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{t}{2y}$$

Determinare,se esiste, una soluzione massimale $y(t)$ dell'equazione tale che $y(1) = 1$. Si ricorda che, se esiste, bisogna specificare l'intervallo di definizione della soluzione.

SOLUZIONE