**Analisi I - IngBM - 2018-19**
**COMPITO A 16 Febbraio 2019**

COGNOME ........................ NOME ............................

MATRICOLA ........................ VALUTAZIONE ..... + ..... = ......

## 1. Istruzioni

*Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo;* **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

## 2. Prima parte

**Esercizio 0. (0 punti)** Leggere e capire le istruzioni.

**Esercizio 1. (3 punti)** Determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(x)|}{x^2}$$

SOLUZIONE
Il limite
□ Esiste e vale □ Non esiste
perché

**Esercizio 2. (4 punti)**
Siano $a_n$ e $b_n$ due successioni di numeri reali definite per $n \geq 0$.
Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Sia $c_n$ la successione definita da $c_{2n} = a_n, c_{2n+1} = b_n$. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

SOLUZIONE.

**Esercizio 3. (3 punti)** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = |\cos(x)|$.

(1) Determinare, se esiste, una primitiva $F(x)$ di $f(x)$.
(2) Nel caso esista, determinare il più grande $n \geq 0$ tale che $F(x)$ sia di classe $\mathcal{C}^n$ ma non di classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

SOLUZIONE.

## 3. Seconda parte

**Esercizio 1. (8 punti)** Si considerino le funzioni $\sin(x), \cos(x)$ sull'intervallo $[0, \pi/2]$ e siano $\arcsin(x)$ e $\arccos(x)$ le rispettive funzioni inverse.

(1) Determinare il dominio $D$ in cui la funzione $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$ è definita.
(2) Dimostrare che $f(x)$ è costante su $D$ e determinarne il valore.

SOLUZIONE.
$D =$

$f(x)$ è costante e vale:

**Esercizio 2. (5 punti)** Indichiamo con $Arctan$ il ramo principale della funzione arcotangente. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{Arctan(t)} dt$

(1) Dimostrare che $F$ è iniettiva.
(2) Dimostrare che $F$ è surgettiva.
(3) Determinare il sottoinsieme $D$ di $\mathbf{R}$ tale che per ogni $y \in D$ la funzione inversa $F^{-1}$ è derivabile.
(4) Per ogni $y \in D$ determinare $(F^{-1})'(y)$.

SOLUZIONE

**Esercizio 3. (5 punti)**

Per ogni numero naturale $n \geq 1$, si consideri il polinomio $p_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-x)^j = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$. Determinare, al variare di $n$, tutte le radici complesse di $p_n(x)$ specificando quali di esse sono reali.

SOLUZIONE

**Esercizio 4. (6 punti)** Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{t}{2y}$$

Determinare,se esiste, una soluzione massimale $y(t)$ dell'equazione tale che $y(-1) = -1$.
Si ricorda che, se esiste, bisogna specificare l'intervallo di definizione della soluzione.

SOLUZIONE