18 Ottobre 2016

Rappresentazione delle funzioni razionali

Si sono viste in altre dispense procedure che permettono per funzioni razionali del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, $\dfrac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n}$ (ove A,B,C, p e q sono delle costanti reali) il calcolo di una primitiva in modo esplicito.

In questa nota si prova che una funzione razionale reale è possibile rappresentarla come somma di un polinomio e di funzioni di questo tipo, rappresentazione che permette quindi il calcolo esplicito di una primitiva della funzione.

Se $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ è una funzione razionale, nel caso che il grado del numeratore sia maggiore di quello del denominatore abbiamo, tramite la divisione euclidea che $P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x)$ con deg $R(x) <$ deg $Q(x)$ e quindi

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Per $P_1(x)$, essendo un polinomio, il calolo di una primitiva è immediato. Possiamo pertanto supporre che il grado del numeratore di $F(x)$ sia minore di quello del denominatore.

Sia a una radice di $Q(x)$ di molteplicità [1] m, cioè sia $Q(x) = (x-a)^m Q_1(x)$ con $Q(a) \neq 0$. Risulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^m} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}$$

e il polinomio $P(x) - AQ_1(x)$ risulta divisibile per $x-a$ se e solo se $P(a) - AQ_1(a) = 0$. Poiché $Q_1(a) \neq 0$ possiamo scegliere $A_1 = \dfrac{P(a)}{(Q_1(a)}$ e con una tale scelta si ha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{M(x)}{(x-a)^{m_1} Q_1}$$

con $m_1 < m$.

Osserviamo subito che la scelta della costante A in una tale rappresentazione è unica poiché se

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B}{(x-a)^m} + \frac{M'(x)}{(x-a)^{m_1} Q_1}$$

è un'altra rappresentazione con le stesse caratteristiche, moltiplicando per $(x-a)^m$ si ha

[1]Ricordiamo che per un polinomio $Q(x)$ si dice che a è una radice di molteplità almeno m se $Q(x) = (x-a)^m Q_1(x)$: la molteplicià verrà detta esattamente m se $Q(a) \neq 0$.

$$A_1 + \frac{M(x)}{(x-a)^{m_1} Q_1}(x-a)^m = B + \frac{M'(x)}{(x-a)^{m_1'} Q_1}(x-a)^m$$

che, calcolato per $x = a$, poiché $m > m_1$ e $m > m_1'$ implica $B = A_1$.

Iterando questo procedimento a partire dalla funzione razionale $\dfrac{M'}{Q_1}$ si perviene ad una rappresentazione del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)} + \frac{P_1}{Q_1}$$

con il polinomio Q_1 che ha come radici tutte le altre radici del polinomio $Q(x)$ diverse da a. Operando questa procedura anche per le altre radici reali di $Q(x)$ si perviene ad una rappresentazione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L_1 + L_2 + \ldots + L_k + \frac{M(x)}{N(x)}$$

dove $N(x)$ è un polinomio che ha per radici solo le radici complesse del polinomio $Q(x)$ e ogni singola L_i è una espressione del tipo

$$\frac{A_1^{(i)}}{(x-a_i)^{m_i}} + \frac{A_2^{(i)}}{(x-a_i)^{m_i-1}} + \ldots + \frac{A_{m_i}^{(i)}}{(x-a)}$$

con m_i molteplicità della radice a_i di $Q(x)$ e $A_j^{(i)}$ costanti univocamente determinate.

Quindi possiamo supporre che la frazione razionale $\dfrac{M(x)}{N(x)}$ abbia il denominatore con solo radici complesse, che, essendo il polinomio $N(x)$ a coefficienti reali, saranno a due a due coniugate.

Sia pertanto $\alpha = u + iv$ una radice complessa di $N(x)$ e $x^2 + px + q$ il polinomio (a coefficienti reali) $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$: se la molteplicità di α è s il polinomio $N(x)$ risulta divisibile per $(x^2+px+q)^s$[2]. Operando in modo simile a quanto fatto per le radici reali si ha

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{M(x)}{(x^2+px+q)^s N_1(x)} = \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M(x)}{(x^2+px+q)^s N_1(x)} - \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^s} =$$

$$= \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M(x) - (Cx+D)N_1(x)}{(x^2+px+q)^s N_1(x)}$$

Procedendo sempre in modo del tutto analogo a quanto fatto nel caso di una radice reale e ricordando il fatto che anche $\overline{\alpha}$ è radice del polinomio $N(x)$ si determinano due costanti C_1, D_1 in modo tale che il polinomio $M(x) - (Cx+D)N_1(x)$ sia divisibile per $x^2 + px + q$ e quindi si perviene ad una espressione del tipo

[2] Perché?

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{C_1 x + D_1}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M_1(x)}{(x^2+px+q)^{s_1} N_1(x)}$$

con $s_1 < s$.[3]

A questo punto con iterazioni successive si arriva alla rappresentazione cercata di una funzione razionale come somma di un polinomio, funzioni razionali del tipo $\frac{A}{(x-a)^n}$ e del tipo $\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^s}$, tutte funzioni queste per cui si conoscono procedure per calcolare esplicitamente una primitiva.

[3] Determinare l'espressione esplicita data da questo procedimento per le costanti C_1 e D_1 e mostrare che anche in questo caso esse sono uniche.