November 23, 2016

SULLE FUNZIONI DERIVABILI DEFINITE SU UN INTERVALLO

Assumiamo di essere nella seguente situazione: $[a,b]$, $a < b$, è un intervallo chiuso e limitato non degenere, mentre (a,b) è il sotto-intervallo aperto dei punti interni di $[a,b]$; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che la restrizione a (a,b) è derivabile. Utilizzeremo i risultati stabiliti nella dispensa [C-INTERVALLI].

Lemma 0.1. *Sia $x_0 \in (a,b)$ e supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < \epsilon$, si ha che $x_0 + h \in (a,b)$ e*

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \ .$$

Si ha il risultato analogo invertendo le disuguaglianze.

Dim. Poiché $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) > 0$, la tesi segue per la "permanenza del segno". □

Questo vuol dire che se $h > 0$, allora $f(x_0+h) > f(x_0)$, se $h < 0$, allora $f(x_0+h) < f(x_0)$. Attenzione, non stiamo dicendo che f è crescente in un intorno di x_0, infatti non è esclusa l'esistenza, per esempio, di $h_1 < h_2 < 0$ tali che $f(x_0 + h_1) > f(x_0 + h_2)$.

Definizione 0.2. Un punto $x_0 \in (a,b)$ si dice punto di *massimo (risp. minimo) locale* per f se esiste $\epsilon > 0$ tale che $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (a,b)$ e per ogni x tale che $|x - x_0| < \epsilon$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$ (risp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Teorema 0.1. *Se $x_0 \in (a,b)$ è un punto di massimo (minimo) locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dim. Osserviamo che se x_0 è un punto di minimo locale per f, allora x_0 è di massimo locale per $-f$. Dunque basta argomentare il caso in cui sia un massimo locale. Supponiamo allora che x_0 sia un punto di massimo locale. Se fosse $f'(x_0) > 0$, e $h > 0$ come nel lemma precedente, allora $f(x_0 + h) > f(x_0)$ contro il fatto che x_0 è un massimo locale. Se fosse $f'(x_0) < 0$ si conclude in modo analogo

□

I punti di (a,b) dove si annulla la derivata si dicono *punti stazionari* di f. Dunque abbiamo visto che i massimi e minimi locali sono stazionari. Il viceversa è falso: 0 è stazionario per la funzione $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ma non è un punto di massimo e neanche di minimo locale. Si nota anche che, per esempio, 0 è un punto di minimo (assoluto) di $x \to |x|$ definita su tutto $\mathbb{R}$, ma questa funzione *non* è derivabile in 0: la derivabilità non è una condizione necessaria affinchè f abbia massimi o minimi locali.

Teorema 0.2. (Teorema di Rolle) *Supponiamo che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che $f'(x) = 0$.*

Dim. Sappiamo che $[a,b]$ contiene un punto di massimo assoluto x_0 e un punto di minimo assoluto y_0. Se entrambi x_0 y_0 sono uno degli estremi a,b, allora f è costante su $[a,b]$ e dunque f' è identicamente nulla su (a,b). Altrimenti almeno uno tra x_0 e y_0, sia x, è un punto interno e per il teorema precedente, $f'(x) = 0$. □

Teorema 0.3. (Teorema di Cauchy) *Siano f, g due funzioni definite su $[a,b]$ che verificano entrambe le ipotesi stabilite all'inizio. Supponiamo che per ogni $x \in (a,b)$, $g'(x) \neq 0$. Allora $g(a) \neq g(b)$ ed esiste $x \in (a,b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Dim. Se fosse $g(a) = g(b)$, per il teorema di Rolle g' non potrebbe essere sempre diversa da zero. Per ogni coppia di costanti non entrambe nulle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la funzione $h = \lambda f + \mu g$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b). Scegliamo

$$\lambda = (g(b) - g(a)), \quad \mu = -(f(b) - f(a))$$

Si verifica facilmente che con questa scelta, la funzione h verifica le ipotesi del Teorema di Rolle. Quindi esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$h'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) = 0 \ .$$

Sostituendo a λ e μ le rispettive espressioni e dividendo membro a membro per $(g(b)-g(a))g'(x)$ (che è diverso da zero), si ottiene la tesi. □

Come corollario, usando $g(x) = x$, otteniamo

Teorema 0.4. **(Teorema del valor medio)** *Esiste $x \in (a,b)$ tale che*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) \ .$$

□

Corollario 0.3. *f è costante su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$.*

Dim. Una implicazione è evidente. Per dimostrare l'altra, preso un arbitrario intervallo chiuso e limitato $[c,d] \subset (a,b)$, applichiamo il Teorema del valor medio alla restrizione di f a $[c,d]$. Allora

$$\frac{f(d)-f(c)}{c-d} = f'(x) = 0$$

da cui $f(c) = f(d)$. Per l'arbitrarietà di c,d si deduce che f è costante su (a,b) e quindi su tutto $[a,b]$ perchè è continua.

□

Corollario 0.4. *Supponiamo che la derivata f' sia continua e si estenda ad una funzione continua definita su tutto $[a,b]$. Allora esiste una costante $K \geq 0$ tale che per ogni $c < d \in [a,b]$, si ha che $|f(d)-f(c)| \leq K|d-c|$.*

Dim. Riscriviamo la formula del valor medio nella forma $f(d)-f(c) = f'(x)(d-c)$, da cui $|f(d)-f(c)| = |f'(x)||d-c|$. La funzione $x \to |f'(x)|$ è continua su $[a,b]$, dunque prende un valore massimo $K \geq 0$, tale che per ogni $x \in (a,b)$ $|f'(x)| \leq K$. Ne segue che la tesi vale su (a,b) e poi si estende per continuità su tutto $[a,b]$. □

Teorema 0.5. *Se per ogni $x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) allora f è crescente (risp. decrescente) su (a,b).*

Dim. Considerando se necessario $-f$, non è restrittivo considerare solo il caso in cui f' è positiva. Siano $c < d$ in (a,b). Allora per il Teorema del valor medio, esiste $x \in (c,d)$ tale che

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = f'(x) > 0$$

da cui si deduce subito che $f(d) > f(c)$.

Corollario 0.5. *Sia f una funzione derivabile definita su un intervallo I aperto (non necessariamente limitato). Allora se $f(x) > 0$ per ogni $x \in I$, f è crescente su I.*

Osserviamo che se nelle ipotesi del teorema precedente rilassiamo le disuguaglianze ($f'(x) \geq 0$ oppure $f'(x) \leq 0$) e nella tesi sostituiamo "crescente" con "non decrescente" ("decrescente" con "non crescente"), allora il teorema resta vero.

Abbiamo osservato prima che un punto stazionario non è necessariamente un massimo o un minimo locale di una funzione derivabile. In generale, decidere se un punto sia o no punto di massimo o minimo locale per una funzione può essere un problema delicato. In certi casi l'uso delle derivate può aiutare. Vediamo alcuni esempi:

- Dato $x_0 \in I$, supponiamo che una funzione continua su I e derivabile su $I \setminus \{x_0\}$ verifichi: $f'(x) \leq 0$ se $x < x_0$, $f'(x) \geq 0$ se $x > x_0$. Allora x_0 è un punto di minimo locale (si usa il fatto che la funzione è non crescente a sinistra di x_0 e non decrescente a destra).

- Supponiamo ora che f sia k-volte derivabile, con k *pari*, e che $f'(x_0) = \dots f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^k(x_0) > 0$. Allora x_0 è un punto di minimo locale. Infatti, usando la teoria dei *polinomi di Taylor* sviluppata nell' apposita dispensa, sappiamo che esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni h tale che $|h| < \epsilon$, si ha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k) \ .$$

Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^k} = f^{(k)}(x_0) > 0 \ .$$

Essendo k pari, $h^k > 0$ se $h \neq 0$; allora, per la permanenza del segno,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$$

per h che varia in un intorno abbastanza piccolo di 0, così che x_0 è un punto di minimo locale.

0.1. **Convessità.** Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su di un intervallo aperto. Siano $x_0, x_1 \in I$, e consideriamo i punti corrispondenti del grafico $G(f)$ di f, cioè $P_0 = (x_0, f(x_0)), P_1 = (x_1, f(x_1))$. Il segmento di $\mathbb{R}^2$ di estremi P_0 e P_1 può essere descritto come l'immagine dell'applicazione

$$s : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad s(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

mentre $t \to (1-t)x_0 + tx_1$ descrive al variare di $t \in [0, 1]$ l'intervallo $[x_0, x_1]$. Allora f si dice *convessa* su I, se per ogni $x_0, x_1 \in I$, per ogni $t \in [0, 1]$, si ha che

$$f((1 - t)x_0 + tx_1) \leq (1 - t)f(x_0) + tf(x_1)$$

cioè, geometricamente, il segmento $[P_0, P_1]$ sta sopra il grafico di f ristretta all'intervallo $[x_0, x_1]$. Invertendo la disuguaglianza (così che $[P_0, P_1]$ sta al di sotto del grafico) si ottiene la definizione di funzione *concava* su I. In modo equivalente, *f è concava se e solo se $-f$ è convessa.* Queste nozioni hanno senso per qualsiasi funzione definita su I, in particolare *non* si richiede che f sia derivabile. La nozione di convessità (concavità) può essere equivalentemente e utilmente riformulata in termini dei rapporti incrementali. Infatti, supponiamo di avere $x_1 < x < x_2$; allora ponendo $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, per cui $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, si ottiene per definizione di convessita'

$$f(x) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1)$$

riscrivendo $x_2 - x = (x_2 - x_1) + (x_1 - x)$, si verifica che la precedente disuguaglianza è equivalente a

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ .$$

In modo analogo si verifica che è equivalente a

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \ .$$

Abbiamo quindi verificato che vale la seguente caratterizzazione delle funzioni convesse.

Proposizione 0.6. *La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa (risp. concava) se e solo se per ogni $x \in I$, la funzione rapporto incrementale di centro x è non decrescente (non crescente) su $I \setminus \{x\}$.*

Ci sono alcune conseguenze interessanti:

- Applicando fatti noti sui limiti delle funzioni monotone, segue da quanto precede che *ogni funzione convessa su I ammette derivata destra e derivata sinistra in ogni punto x_0 di I.*

- Dall'esistenza delle derivate destre e sinistre segue che *ogni funzione convessa su I è continua.*

- Come gia' osservato, la caratterizzazione così ottenuta non richiede, per esempio, che f sia derivabile. Supponendo che la funzione convessa sia anche derivabile su I otteniamo informazioni specifiche:

Proposizione 0.7. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ definita sull'intervallo aperto I. Allora:*
(1) Se f è convessa e derivabile, allora per ogni $x, x_0 \in I$,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

Geometricamente, questo significa che il grafico di f sta tutto da una parte rispetto alla retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. In particolare se x_0 è un punto stazionario, allora x_0 è un punto di minimo locale per f.

(2) Se f è derivabile, allora f è convessa (risp. concava) se e solo la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ è non decrescente (non crescente).

(3) Se f è derivabile due volte, allora f è convessa (risp. concava) se per ogni $x \in I$, $f^{(2)}(x) \geq 0$ ($f^{(2)}(x) \leq 0$).

Dim. Passando al limite per $x \to x_0$, (1) segue dalla monotonia del rapporto incrementale in x_0.
Se f è convessa (concava), la monotonia dei rapporti incrementali passa al limite determinando la monotonia della derivata. Questo mostra che la condizione enunciata in (2) è necessaria. D'altra parte, applicando il teorema del valor medio, si verifica che la monotonia della derivata determina la monotonia dei rapporti incrementali. Quindi la condizione è anche sufficiente. Questo dimostra il punto (2). Se la derivata seconda è non negativa (non positiva), sappiamo che la derivata prima è non decrescente (non crescente), quindi il punto (3) segue dal punto (2).

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile, $x_0 \in I$ si dice un punto di flesso *ascendente* (risp. *discendente*) per f se esiste un sottointervallo aperto $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$, $\epsilon > 0$, tale che f è concava (risp. convessa) su $(x_0 - \epsilon, x_0)$ e convessa (risp. concava) su $(x_0, x_0 + \epsilon)$.

Proposizione 0.8. *Sia $x_0 \in I$ un punto di flesso di $f : I \to \mathbb{R}$ di tipo discendente (ascendente).*
(1) Se f è derivabile allora x_0 è un punto di massimo (minimo) locale di f'.
(2) Se f è derivabile due volte, allora $f"(x_0) = 0$.