November 21, 2016

FUNZIONI DERIVABILI

1. Definizioni e prime proprietà

In questa dispensa consideriamo funzioni definite su insiemi aperti di $\mathbb{R}$, in particolare su intervalli aperti. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto di $\mathbb{R}$. Dato $a \in D$ definiamo sull'insieme $D \setminus \{a\}$ la funzione *rapporto incrementale di f rispetto al punto a*

$$x \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

Diciamo che la funzione f *è derivabile in* $a \in D$ se esiste ed è *finito* il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R} \ .$$

In tal caso L è detta la *derivata* di f in a e scriviamo

$$L = f'(a) \ .$$

Nella letteratura si trovano diverse altre notazioni per indicare la derivata oltre $f'(a)$, per esempio

$$\frac{d}{dx} f(a), \quad \dot{f}(a) \ .$$

Potrà capitare anche a noi di usare l'una o l'altra notazione. A volte si preferisce scrivere il rapporto incrementale nella forma

$$x \to \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

dove abbiamo fatto il cambiamento *locale* di variabile $h = x - a$. Infatti questo in generale non ha senso su tutto D; però, siccome D è aperto, esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(a, \epsilon) \subseteq D$, quindi basta assumere che $|h| = |x - a| < \epsilon$. E' chiaro allora che

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L \in \mathbb{R} \ .$$

Derivata e differenziale. Supponiamo che f sia derivabile in $a \in D$ e sia $f'(a) \in \mathbb{R}$ la derivata in a. Consideriamo la *funzione lineare*

$$Df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ Df_a(x) = f'(a)x$$

ottenuta per moltiplicazione con lo scalare $f'(a)$. Questa funzione è detta il *differenziale di f in a*. E' chiaro che la derivata e il differenziale in a si ricavano l'una dall'altro in modo automatico, però sono oggetti diversi perchè la derivata è uno scalare mentre il differenziale è una funzione. Possiamo allora riscrivere

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(a + h) - f(a)) - Df_a(h)}{h} = 0$$

o, ancora, usando la notazione "o-piccolo" di Landau,

$$(f(a + h) - f(a)) - Df_a(h) = o(h)$$

dove $o(h)$ indica una (qualsiasi) funzione definita in un intorno di 0 tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0 \ .$$

In modo equivalente possiamo anche scrivere

$$f(a+h) - f(a) = D_a f(h) + o(h)$$

oppure

$$f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + o(h) \ .$$

Si noti che $g(h) := f(a+h) - f(a)$ considerata come funzione di h è tale che $g(0) = 0 = Df_a(0)$. La penultima espressione esprime bene l'idea intuitiva che Df_a è la funzione lineare di h che meglio approssima la funzione $g(h)$ in un intorno di 0 (a volte si dice anche che Df_a *linearizza* g in un intorno di 0). Analogamente l'ultima espressione esprime il fatto che la funzione $h \to f(a) + Df_a(h)$ approssima "bene" localmente $h \to f(a+h)$ in un intorno di $h = 0$.

Interpretazione geometrica del rapporto incrementale e della derivata. Ricordiamo che dati due punti distinti $(x_0, x_1), (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tali che $x_0 \neq y_0$, la retta passante per i due punti è parallela alla retta passante per l'origine di equazione

$$y = mx, \ m = \frac{x_1 - y_1}{x_0 - y_0}$$

ed m è detto il *coefficiente angolare* della retta. Si vede allora che il rapporto incrementale è proprio il coefficiente angolare della retta passante per i due punti del grafico di f: $(x, f(x))$ e $(a, f(a))$. Dunque se la funzione è derivabile in a, la derivata $f'(a)$ può essere interpretata come il coefficiente angolare di una retta "limite" di equazione $y = f'(a)x$; la retta parallela a questa retta e passante per il punto $(a, f(a))$ (che ha equazione $y = f'(a)x + q$, dove $q = (f(a) - f'(a)a)$) è detta la *retta tangente al grafico di f nel punto* $(a, f(a))$. Si nota che la retta $y = f'(a)x$ è proprio il grafico della funzione lineare $D_a f$. La retta tangente al grafico di f è il grafico della funzione $x \to D_a f(x) + q$.

Interpretazione cinematica della derivata. Restringiamoci come sopra ad un intervallo $I(0, \epsilon) \subseteq D$. Allora interpretando t come una variabile "temporale", l'applicazione definita su $I(0, \epsilon)$, $t \to (a+t, f(a+t)$ può essere interpretata come la "legge oraria" di un punto del piano che si muove nel tempo. La traiettoria è una curva contenuta nel grafico di f. Allora il vettore $v = (1, f'(a))$ rappresenta il vettore velocità del punto che all'istante $t = 0$ si trova nella posizione $(a, f(a))$. Questo vettore è una base della retta $y = f'(a)x$ considerata come sottospazio vettoriale di dimensione uguale a 1 di $\mathbb{R}^2$.

Derivate destre e sinistre. Dato un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$, diciamo che $a \in D$ è *una estremità locale sinistra (risp. destra)* se esiste $\epsilon > 0$ tale che $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap D = [a, a + \epsilon)$ (risp. $= (a - \epsilon, a]$). Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ si dice *"buono"* se ogni $a \in D$ è interno oppure è una estremità locale. Se a è una estremità locale sinistra di D ed esiste finito

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L \in \mathbb{R}$$

si dice che $f'_+(a) = L$ è la derivata destra di f in a. Analogamente si definisce la derivata sinistra $f'_-(a)$ in una estremità destra. Molte delle cose che diremo potrebbero essere generalizzate agli insiemi "buoni" e alle derivate destre e sinistre. Per semplicità ci limiteremo al caso degli insiemi aperti.

Funzioni globalmente derivabili. La funzione f si dice *derivabile su* D se lo è in ogni punto di D. In tal caso è definita la *funzione derivata* di f:

$$f' : D \to \mathbb{R} \ .$$

Se $f' := f^{(1)}$ è a sua volta derivabile, localmente nel punto a o globalmente su tutto D, allora è definita la derivata seconda $f^{(2)}(a)$ in a, oppure la *funzione derivata seconda* $f^{(2)} : D \to \mathbb{R}$. In modo induttivo, se è definita la *funzione derivata n-esima* $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$, se questa è localmente derivabile in a è definita $f^{(n+1)}(a)$; se è derivabile su D, allora è definita la funzione $f^{(n+1)} : D \to \mathbb{R}$. Diciamo che la funzione f è *n-volte derivabile* se esitono le funzioni derivate j-esime per $1 \leq j \leq n$. Diciamo che $f : D \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^0$ se è continua su D. Diciamo che f è di classe $\mathcal{C}^n$ se è continua, n-volte derivabile e per ogni $1 \leq j \leq n$, la funzioni derivata j-esima $f^{(j)} : D \to \mathbb{R}$ è continua su D. La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ se per ogni $n \geq 1$, f è di classe $\mathcal{C}^n$. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.1. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ è derivabile allora $f \in \mathcal{C}^0$ (cioè è continua). Più in generale se f è $n+1$-volte derivabile, allora f è di classe $\mathcal{C}^n$. Se per ogni $n \geq 1$, f è n-volte derivabile allora f è di classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Dim. Ragionando poi per induzione, basta dimostrare che se f è derivabile in $a \in D$, allora f è continua in a. Infatti, poiché se $x \neq a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

passando al limite per $x \to a$ e usando alcune proprietà note dei limiti si vede che $f(x) \to f(a)$. $\square$

Si noti che se una funzione è $n+1$-volte derivabile, in generale $f^{(n+1)}$ non è continua, quindi f non è $\mathcal{C}^{n+1}$ (più sotto vedremo un esempio con $n = 1$).

Esempi fondamentali. Le seguenti funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ sono derivabili (in effetti sono di classe $\mathcal{C}^\infty$):

$$f(x) = c,\ f' = 0$$
$$f(x) = x,\ f'(x) = 1$$
$$f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x)$$
$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x\ .$$

Infatti:

- Per le funzioni costanti e per l'identità la verifica è immediata.
- Calcoliamo per ogni $a \in \mathbb{R}$,

  $$(\exp)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h}$$

  si ha che

  $$\exp(a+h) - \exp(a) = \exp(a)(\exp(h) - 1)$$

  Dunque

  $$(\exp)'(a) = \exp(a) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(a)$$

  abbiamo così verificato che $(\exp)' = \exp$.
- Calcoliamo per ogni $a \in \mathbb{R}$,

  $$(\sin)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$$

  per note formule trigonometriche sappiamo che

  $$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$$

  da cui

  $$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

  Passando al limite per $h \to 0$ e ricordando gli opportuni limiti notevoli (vedi la scheda [LIMITI]) si conclude che

  $$(\sin)'(a) = \cos(a)\ .$$

  Il coseno si tratta in modo analogo.

.

2. Procedure che preservano la derivabilità

Abbiamo visto nella dispensa [C-elementari], alcune procedure che preservano la continuità. Vogliamo specializzare ed eventualmente restringere quelle procedure in modo da preservare la derivabilità. In particolare vogliamo fare in modo di lavorare in ogni momento con funzioni definite su aperti di $\mathbb{R}$.

Vediamo subito che dobbiamo eliminare le procedure "min", "max" e quindi "valore assoluto". Infatti $x \to |x|$, definita su tutto $\mathbb{R}$ non è derivabile in 0. Attenzione, stiamo dicendo che *in generale* queste procedure non preservano la derivabilità; *non* stiamo dicendo che una funzione definita tramite una formula che contenga dei valori assoluti è automaticamente non derivabile; per esempio la funzione $x \to |e^x|$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Elenchiamo qui di seguito una lista ristretta delle procedure che preservano la derivabilità, che indicheremo genericamente con $\mathbf{P}_d$.

Siano $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D' \to R$ funzioni *derivabili* (quindi continue) definite su aperti di $\mathbb{R}$.

- *(restrizione)* Per ogni insieme aperto D^* di $\mathbb{R}$ contenuto in D, consideriamo la restrizione $f_{|D^*}$.
- *(somma e prodotto)* Supponiamo $D \cap D' \neq \emptyset$. Poiché l'intersezione di insiemi aperti è un insieme aperto, $f + g : D \cap D' \to \mathbb{R}$ e $fg : D \cap D' \to \mathbb{R}$ sono definite come al solito.
- *(reciproco)*. Poiché f è derivabile, quindi continua, $D' = D \backslash \{f = 0\}$ è automaticamente aperto (verificarlo per esercizio); se $D' \neq \emptyset$, allora è ben definita su D' la funzione $x \to 1/f(x)$.
- *(inversa)* Se f è iniettiva e derivabile, quindi continua, sappiamo che $f(D)$ è aperto e $f^{-1} : f(D) \to D$ è continua. Richiediamo *inoltre* che per ogni $a \in D$, $f'(a) \neq 0$.
- *(composizione)* Nessuna modifica nella definizione della procedura.

La seguente proposizione riassume importanti proprietà strutturali delle funzioni derivabili.

Proposizione 2.1. *L'insieme delle funzioni definite su aperti di $\mathbb{R}$ e derivabili è chiuso rispetto alle procedure $\mathbf{P}_d$, cioè la funzione risultante da una tale procedura è definita su un aperto e derivabile.*

La richiesta fatta in "inversa" che $f'(a) \neq 0$ per ogni $a \in D$ è necessaria. Infatti si consideri per esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è derivabile con derivata $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$; f è bigettiva con funzione inversa data da $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ se $y > 0$, $f^{-1}(y) = -|y|^{1/3}$ se $y < 0$. Si verifica che f^{-1} non è derivabile in 0. Infatti il limite del rapporto incrementale in 0 è ∞; il significato geometrico è che esite una retta limite tangente al grafico della funzione f^{-1} nel punto $(0, 0)$ ma che questa retta è *verticale*; questo corrisponde al fatto che la retta tangente al grafico di f in $(0, 0)$ è *orizzontale.*

2.1. Regole di derivazione.

Possiamo rafforzare l'enunciato della proposizione precedente, dimostrando non solo che ogni funzione risultante è derivabile, ma esibendo anche esplicite formule per la sua derivata in funzione delle derivate delle funzioni iniziali.

- ("Restrizione") Per ogni $a \in D^*$, $(f_{|D^*})'(a) = f'(a)$ (cioè "la derivata della restrizione è la restrizione della derivata".)
- ("Somma") Per ogni $a \in D \cap D'$, $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- ("Prodotto") Per ogni $a \in D \cap D'$, $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.
- ("Reciproco") Per ogni $a \in D^* = D \setminus \{f = 0\}$, $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.
- ("Composizione") Per ogni $a \in D$, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.
- ("Inversa") Per ogni $b = f(a)$, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Osservazioni e verifiche.
- Nel caso di "composizione" e "inversa" le formule diventano particolarmente espressive se riformulate in termini delle funzioni differenziali; infatti si ha:

- Per ogni $a \in D$, $D_a(g \circ f) = Dg_{f(a)} \circ Df_a$ cioè: "il differenziale della composizione di due funzioni è la composizione dei rispettivi differenziali (nello stesso ordine)".
- $Df^{-1}_{f(a)} = (Df_a)^{-1}$, cioè "il differenziale della funzione inversa è l'inverso del differenziale della funzione di partenza".

- La formula del prodotto, quando $f = c$ è una funzione costante diventa $(cg)' = cg'$. Insieme con la regola per la somma, questo mostra che la derivata ha un *comportamento lineare* (nel senso delle applicazioni lineari studiate nel corso di *Algebra lineare*).
- La regola per la restrizione è immediata perché la derivata dipende solo dal comportamento *locale* della funzione.
- La regola per la somma segue dal fatto che il rapporto incrementale in un punto della somma di due funzioni è la somma dei rispettivi rapporti incrementali; si puo' applicare infine un risultato noto sui limiti della somma di due funzioni.
- La formula per il prodotto è nota come *formula di Leibniz*. Dimostriamola: sommando e sottraendo la quantità $f(a)g(x)$ al numeratore del rapporto incrementale di fg rispetto ad $a \in D \cap D'$, si realizza che

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

e passando al limite per $x \to a$ il risultato segue.

Giustifichiamo la regola per la composizione. Poniamo $b = f(a)$, $y = f(x)$; usando il fatto che g è derivabile in b, abbiamo

$$g(y) - g(b) = g'(b)(y-b) + \alpha(y)$$

dove

$$\lim_{y \to b} \alpha(y)/(y-b) = 0 \ .$$

Usando il fatto che f è derivabile in a, abbiamo

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \beta(x)$$

dove

$$\lim_{x \to a} \beta(x)/(x-a) = 0 \ .$$

Sostituendo abbiamo

$$g(f(x)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f'(a)(x-a) + \beta(x)) + \alpha(y)$$

da cui

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = g'(f(a))f'(a) + g'(f(a))\frac{\beta(x)}{x-a} + \frac{\alpha(y)}{y-b}\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ .$$

Passando al limite per $x \to a$ (per cui $y = f(x) \to f(a) = b$), usando proprietà generali dei limiti e particolari delle funzioni α e β, si realizza infine che

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = g'(f(a))f'(a) \ .$$

La regola per "reciproco" si può ricavare da quella per "prodotto", partendo da $(f(1/f))' = (1)' = 0$.
La regola per "inversa" si può ricavare da quella di composizione, partendo da $(f^{-1} \circ f)' = \mathrm{id}' = 1$.

Qualche esempio:
- Usando "inversa" e il fatto già visto che $(e^x)' = e^x$, si verifica che $\log'(y) = 1/y$.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$. Questo si ottiene per induzione usando "prodotto". Il passo iniziale $(x)' = x^0 = 1$ è già stato verificato. Usando "somma" e "prodotto" si calcola la derivata di qualsiasi funzione polinomiale che risulta essere a sua volta polinomiale.
- Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $x \to x^\alpha := e^{\alpha \log(x)}$ è definita e derivabile su $D = \{x > 0\}$. Usando "composizione" si ha che $(x^\alpha)' = (\alpha/x)e^{\alpha \log(x)} = \alpha x^{\alpha-1}$. Giustifichiamo l'ultima uguaglianza:

$$\alpha x^{\alpha-1} = \alpha e^{\alpha \log(x)}(e^{\log(x)})^{-1} = \alpha e^{\alpha \log(x)} x^{-1}$$

come volevamo.
- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ se $x \neq 0$. Si verifica usando la definizione che f è derivabile in 0 e che $f'(0) = 0$. Su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la funzione è ottenuta

applicando alcune delle procedure ammissibili a partire da funzioni derivabili note. Applicando le rispettive regole di derivazione si verifica che f è derivabile su D e che $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. Quindi f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. D'altra parte non esiste il limite di $f'(x)$ per $x \to 0$, quindi la derivata non è continua in 0 e la funzione non è di classe C^1 su $\mathbb{R}$.

3. Funzioni derivabili elementari

Procedendo come nel caso delle funzioni continue, una funzione derivabile elementare si ottiene applicando un numero finito di procedure $\mathbf{P}_d$ a partire dalle funzioni fondamentali

$$x \to c,\ x \to x,\ x \to \sin(x),\ x \to e^x$$

definite su tutto $\mathbb{R}$. Indichiamo $\mathcal{E}_d$ l'insieme di tutte le funzioni derivabili elementari. Tutte le famiglie particolari di funzioni continue elementari elencate alla fine di [C-elementari] (*polinomiali*, *razionali*, etc.) sono in effetti derivabili elementari. Segue dalle regole di derivazione che:

L'insieme $\mathcal{E}_d$ è chiuso per la derivata (cioè la derivata di ogni funzione derivabile elementare è derivabile elementare). Tutte le funzioni derivabili elementari sono di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Concludiamo enunciando (senza dare la dimostrazione) un'altra proprietà interessante delle funzioni derivabili elementari, la cosiddetta *proprietà del prolungamento analitico*.

Proposizione 3.1. *Se f e g sono due funzioni derivabili elementari definite su un intervallo aperto I che coincidono su un sotto-intervallo aperto $I' \subset I$, allora f e g coincidono su tutto I.*

4. Una tabella di funzioni derivate

In questa scheda sono raccolte le derivate di alcune funzioni elementari. Se necessario, lo studente dovrebbe essere in grado di ottenerle usando le varie regole di derivazione. Comunque questa scheda potrà essere consultata e a volte essere di aiuto per il calcolo di altre derivate.

- $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
- $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $f(x) = x^a = e^{a\log(x)}$, $f'(x) = \dfrac{a}{x}e^{a\log(x)} = ax^{a-1}$, $(x > 0)$
- $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$.
- $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$.
- $f(x) = \tan(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
- $f(x) = \cot(x)$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)}$.
- $f(x) = \arcsin(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$.
- $f(x) = \arccos(x)$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$.
- $f(x) = \arctan(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- $f(x) = a^x$, $f'(x) = \log(a)a^x$ $(a > 0)$.
- $f(x) = \log_a(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{\log(a)x}$, $(x > 0)$.
- $f(x) = \sinh(x)$, $f'(x) = \cosh(x)$.
- $f(x) = \cosh(x)$, $f'(x) = \sinh(x)$.

- $f(x) = \tanh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.
- $f(x) = \coth(x),\ f'(x) = \dfrac{-1}{\sinh^2(x)}$.
- $f(x) = arc\sinh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $f(x) = arc\cosh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- $f(x) = arc\tanh(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.