Ing. Biomedica - 2017-18

Analisi I

15 Settembre 2018

Compito X

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **VALUTAZIONE** .... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Prima parte.

Esercizio 1. (punti 3)
Si studi il comportamento per $n \to \infty$ (cioè se è una successione convergente, divergente o che non ammette limite) della successione

$$a_n = n^n + (-1)^n n!$$

SOLUZIONE.

Esercizio 2. (punti 3)

Provare per induzione che per ogni $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

SOLUZIONE.

Esercizio 3. (punti 4) (a) Si dica se esiste un numero reale $\overline{x}$ soluzione dell'equazione

$$e^x + e^{2x} - 1 = 0.$$

(b) In caso affermativo, si dica se esiste $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$, tale che $\overline{x} \in [n, n+1]$. Stessa domanda con $n > 0$.

SOLUZIONE.

Seconda Parte

Esercizio 1. (punti 10)
Si Consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dafinita da $f(x) = x^2 + 1 - |x^2 - 1|$.
a) Determinare il più grande sottoinsieme $C \subset \mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su C sia continua.
b) Determinare il più grande sottoinsieme aperto $A \subset \mathbf{R}$ tale che la restrizione di f su A sia derivabile.
c) Determinare gli eventuali punti di massimo locale e di massimo assoluto della funzione f.
d) Determinare gli eventuali asintoti del grafico della funzione f.
e) Si studi il comportamento per $n \to \infty$ della successione $a_n = \displaystyle\int_n^{n+2} f(x)dx$.

Esercizio 2. (punti 4)
Dire se esistono soluzioni complesse dell'equazione

$$e^{2z} + 2e^z + 1 = 0 \ .$$

Esistono soluzioni reali della stessa equazione?
SOLUZIONE.

Esercizio 3. (punti 5)
Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Supponiamo che esista $x_0 \neq 0$ tale che $F(x_0) = 0$. Dimostrare che esiste $t_0 \in \mathbf{R}$ tale che $f(t_0) = 0$.
SOLUZIONE.

Esercizio 4. (punti 5) Determinare se esite una soluzione dell'equazione differenziale

$$x + 2yy' = 0$$

tale che $y(1) = 1$.