3 Novembre 2014

Un anno di trigonometria e un po' di logaritmi

1 Un poco di logaritmi

Nella dispensa Reali abbiamo visto che si può definire per ogni reale $a > 0$ una funzione f, che abbiamo indicato con a^q, da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}^+$ con la proprietà che per ogni $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\quad f(q_1 + q_2) = f(q_1) \cdot f(q_2)$: se $q = \frac{m}{n}$ abbiamo definito $a^q = \sqrt[n]{a^m}$. Dopodiché abbiamo esteso, tramite l'assioma di continuità, questa funzione a tutto $\mathbb{R}$ definendo a^x come il sup dell'insieme $\{a^{\frac{m}{n}}$ con $\frac{m}{n} < x\}$.

Abbiamo *affermato* , lasciando la verifica al lettore, che si verifica che questa funzione se $a > 1$ è crescente e che vale

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$ [1]

A questo punto, dati due numeri reali a e b positivi, definiamo *logaritmo di* b *in base* a l'esponente da dare a a per ottenere b,[2] cioè

$$a^{\log_a b} = b$$

Dalla proprietà

$$a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$$

otteniamo

$$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$$
$$\log_a b^c = c \log_a b$$

Come ultima considerazione osserviamo che se $x = \log_a c$ e $y = \log_b c$ da

$$c = a^x = b^y$$

prendendo i logaritmi in base a di entrambi i membri otteniamo

$$\log_a c = \log_b c \log_a b$$

---

[1] La crescenza deriva immediatamente da questo: se $x < y$ allora $y - x > 0$ e quindi se $a > 1$ si ha $a^y = a^x \cdot a^{y-x} > a^x$.

[2] Stiamo sorvolando sull'esistenza di un tale numero reale, cioè sulla surgettività di tale funzione su $\mathbb{R}^+$

2 Un poco di trigonometria.

Nel paragrafo precedente abbiamo brevemente richiamato il fatto che fissato un numero reale a, abbiamo definito una funzione $\exp_a$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ con la proprietà che $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1)\exp_a(x_2)$ e che per far questo abbiamo per prima cosa definito la funzione sul sottoinsieme dei razionali e poi la abbiamo estesa tramite l'assioma di continuità a tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora la circonferenza unitaria S di centro O in $\mathbb{R}^2$. In S possiamo definire una somma in questo modo. Fissiamo un punto (per esempio il punto $U \equiv (1, 0)$; per ogni $P \in S$ è ben definito l'angolo al centro $\widehat{UOP}$. Possiamo definire $P + Q$ come il punto R tale che $\widehat{UOR} = \widehat{UOP} + \widehat{UOQ}$

Per definire le funzioni seno e coseno assumeremo che si possa definire, in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente, una funzione h da R alla circonferenza unitaria S con la propietà $h(t_1+t_2) = h(t_1)+h(t_2)$. L'esistenza di una tale funzione sarà più chiara in seguito, dopo aver introdotto la nozione di integrale.

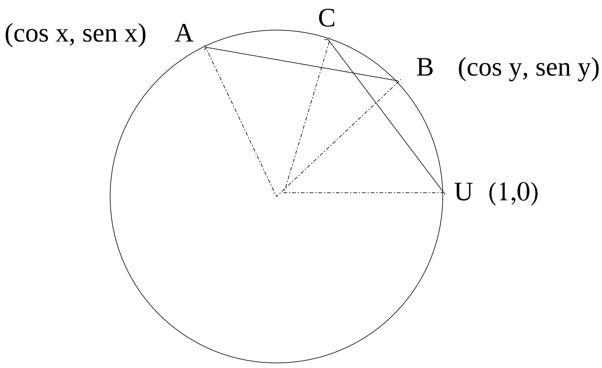
Detto ciò, definiamo le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ come l'ascissa e l'ordinata del punto $P = h(x)$ sulla circonferenza S. [3]

Risulta quindi immediatamente che vale la relazione $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Al fine di ottenere altre formule interessanti dimostriamo per prima cosa la formula di addizione per il coseno: tutto il resto sarà una conseguenza.

Lo scopo è quindi di trovare una espressione per $\cos(x + y)$ in temini delle funzioni seno e coseno di x e y.

La prova che forniamo si basa sulla considerazione che tutta la geometria che stiamo considerando non varia se operiamo una isometria.



Consideriamo quindi la situazione nella figura e operiamo una rotazione che porti il punto $B \equiv (\cos y, \sin y)$ nel punto $U \equiv (1, 0)$. Essendo una rotazione una trasformazione che conserva le distanze (isometria) la distanza dei punti A e B (cioè la lunghezza del segmento AB) e quella dei punti C e U (lunghezza del segmento CU) sarà la stessa. Calcolandole si ha

$$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} = \sqrt{(\cos(x - y) - 1)^2 + (\sin(x - y) - 0)^2}$$

[3]Si noti quindi che queste funzioni sono *funzioni della variabile reale x*.

Svolgendo i calcoli otteniamo

$$\sqrt{1+1-2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)} = \sqrt{1+1-2\cos(x-y)}$$

da cui quadrando e semplificando otteniamo

$$\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

Da questa formula se ne ricava immediatamente una analoga per la funzione seno ricordando che $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2}+x)$

$$\sin(x-y) = \cos(\frac{\pi}{2}+x-y) = \cos(\frac{\pi}{2}+x)\cos y+\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin y = \sin x\cos y-\cos x\sin y$$

Scriviamo ciò che abbiamo ottenuto per $x+y$

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y-\sin x\sin y\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y+\cos x\sin y\end{aligned}$$

Da qui prendendo $y=x$ si ottengono immediatamente le formule di duplicazione

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x\\ \sin 2x &= 2\sin x\cos x\end{aligned}$$

da cui quelle di bisezione

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\\ \sin\frac{x}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.\end{aligned}$$

Ovviamente si può continuare ottenendo formule di trisezione etc. Le cosiddette formule di prostaferesi si ottengono sommando (e sottraendo) le formule di addizione e sottrazione per seno e coseno, cioè sommando e sottraendo espressioni del tipo $\sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y$ e $\sin(x-y) = \sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)$. Ponendo $x+y=p$ e $x-y=q$ abbiamo che $x=\frac{p+q}{2}$ e $y=\frac{p-q}{2}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\sin p+\sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \sin p-\sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\ \cos p+\cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p-\cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

3 Continuità delle funzioni trigonometriche e esponenziali.

Si suppone noto il contenuto sulla continuità della dispensa FUNZIONI.

Vogliamo provare che le funzioni trigonometriche ed esponenziali sono funzioni continue.

Funzioni trigonometriche.

Osserviamo che se per una funzione f vicino a un punto x_0 vale

$$|f(x) - f(x_0)| \leq A|x - x_0| \qquad (*)$$

con A costante positiva, abbiamo immediatamente che la funzione f è continua nel punto x_0.[4]

La definizione di continuità chiede infatti che per ogni ε esista un δ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Se vale la relazione (*) basta prendere $\delta \leq \frac{\varepsilon}{A}$ e si ha che se $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{A}$ allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq A|x - x_0| \leq A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Detto ciò si osservi che dalla seconda formula di prostaferesi si ha

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right|$$

Essendo $\left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| < 1$ si ha

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| {}^{5} = |x - x_0|$$

In modo del tutto analogo si prova la continuità della funzione $\cos x$ oppure utilizzando le relazioni che legano le funzioni seno e coseno.

Funzioni esponenziali.

Proviamo ora che la funzione esponenziale a^x una funzione continua.

Supporremo $a > 1$, lasciando al solito al lettore la cura di completare la prova negli altri casi.

Vogliamo provare che $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. Un modo potrebbe esser questo.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Vogliamo vedere se esiste un δ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$.

---

[4]Una funzione per cui vale tale relazione si dice soddisfare alla condizione di Lipschitz o che è lipschitziana e A viene detta costante di Lipschitz.

[5]Si è usato il fatto che verrà dimostrato in seguito che $|\sin x| \leq |x|$

$$|a^x - a^{x_0}| = \left|a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)\right|$$

Per comodità pensiamo $x > x_0$: abbiamo $a^{x-x_0} > 1$ e quindi $|a^{x-x_0} - 1| = a^{x-x_0} - 1$ e quindi se prendo $\delta \leq \log_a \left(\frac{\varepsilon}{a^{x_0}} + 1\right)$ si ha che se $|x - x_0| \leq \delta$ allora

$$a^{x-x_0} \leq \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} + 1$$

da cui

$$a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) \leq \varepsilon$$

Il ragionamento è perfettamente analogo per l'intervallo sinistro, cioè se $x < x_0$.