October 19, 2015

SUCCESSIONI

In questa dispensa faremo riferimento a nozioni relative alla *retta estesa* $\overline{\mathbb{R}}$ e ai sistemi di intorni di ogni $a \in \overline{\mathbb{R}}$ che sono definite nella dispensa [TOP].

1. Nozioni generali

Dato un insieme non vuoto X, una *successione a valori in* X è una funzione della forma:

$$a : \{n \in \mathbb{N} |\ n \geq n_0\} \to X$$

dove $n_0 \in \mathbb{N}$ è un fissato numero naturale. Per semplicità scriveremo $\{n \geq n_0\}$ invece di $\{n \in \mathbb{N} |\ n \geq n_0\}$; inoltre, di solito, per ogni $n \geq n_0$, scriveremo a_n invece di $a(n)$. Ogni $a_n \in X$ è detto un termine della successione, l'insieme dei termini è un sottoinsieme di X, infatti non è altro che l'*immagine* della funzione a:

$$\mathrm{Im}(a) = \{a_n \in X |\ n \geq n_0\}\ .$$

Una successione a è *costante* se $\mathrm{Im}(a) = \{b\}$ cioè consiste di un solo elemento, cioè per ogni $n \geq n_0$, $a_n = b$. E' utile fissare la seguente nozione generale:

Successioni che verificano definitivamente una proprietà. Sia $a : \{n \geq n_0\} \to X$ una successione. Diciamo che essa verifica *definitivamente* una certa proprietà P se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$, $\bar{n} \geq n_0$ tale che per ogni $n > \bar{n}$, a_n verifica la proprietà P. Cioè la proprietà può non valere per un numero arbitrariamente grande di indici n, ma da un certo indice in poi vale sempre.
Ad esempio:
- Si consideri la successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a_n = n$ per ogni $n \geq 0$. Allora la successione a verifica definitivamente la proprietà "$a_n > 5$" (basta prendere as esempio $\bar{n} = 7$). Invece a *non* verifica definitivamente la proprietà : "a_n è pari". Infatti per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$, $\bar{n} + 2 > \bar{n} + 1 > \bar{n}$ e almeno uno tra $\bar{n} + 2$ e $\bar{n} + 1$ non è pari. Si noti che a_n è pari per un insieme infinito di indici n; in casi così si dice a volte che la proprietà è verificata *frequentemente*, ma questo non basta affinché la proprietà sia verificata definitivamente.
- Una successione a è definitivamente costante se esiste $\bar{n} \geq n_0$ tale che per ogni $m, n > \bar{n}$, $a_n = a_m$. Per esempio la successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $a_n = \min(n, 700)$ è definitivamente costante, infatti per ogni $n > 699$, $a_n = 700$.

2. Successioni di numeri reali

Enunceremo in modo esauriente diverse nozioni e proprietà relative alle successioni di numeri reali. Non le dimostreremo tutte, ma di tutte potremo fare liberamente uso.

Noi saremo particolarmente interessati al caso di *successioni di numeri reali*, cioè quando $X = \mathbb{R}$. In questo caso è conveniente introdurre alcune nozioni che sono definite usando le proprietà di $\mathbb{R}$. Sia

$$a : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$$

una successione di numeri reali.

- La successione a è *superiormente (risp. inferiormente) limitata* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \geq n_0$, $a_n \leq M$ (risp. $a_n \geq M$).
- La successione a è *limitata* se è contemporaneamente superiormente e inferiormente limitata.
- La successione a è *crescente* (risp. *decrescente*) se per ogni $n, m \in \{n \geq n_0\}$, se $n > m$ allora $a_n > a_m$ (risp. $a_n < a_m$). Una successione è detta *strettamente monotona* se è crescente o decrescente.
- La successione a è *non decrescente* (risp. *non crescente*) se per ogni $n, m \in \{n \geq n_0\}$, se $n > m$ allora $a_n \geq a_m$ (risp. $a_n \leq a_m$). Una successione è detta *monotona* se è non crescente o non decrescente.

Attenzione. Questa terminologia, benché largamente diffusa, può essere un po' fuorviante. Per esempio la definizione data di "successione non crescente" NON è la negazione della definizione di "successione crescente" data prima; infatti tale negazione è:

Esistono $n, m \geq n_0$ tali che $n > m$ e $a_n \leq a_m$.

3. Limiti di successioni

Data una successione
$$a : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$$
dato un elemento della retta estesa $L \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vogliamo dare un senso alla scrittura
$$L = \lim_{n\to+\infty} a_n$$
che leggeremo:

$L \in \overline{\mathbb{R}}$ *è limite della successione* a_n *quando* n *tende all'infinito.*

A volte useremo anche la notazione abbreviata
$$a_n \to L$$
che leggeremo "a_n tende a L per n che tende all'infinito".

Definizione sintetica del limite di una successione. Ricordiamo che per ogni $L \in \overline{\mathbb{R}}$, nella dispensa [TOP] abbiamo definito un sistema di intorni aperti di L. Allora:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$
se per ogni U *elemento del sistema di intorni di* L*,* a_n *appartiene definitivamente ad* U*.*

Adesso facciamo l'esercizio di esplicitare completamente in modo analitico questa definizione sintetica, distinguendo i casi in cui $L \in \mathbb{R}$ oppure $L = \pm\infty$.

• Supponiamo che il valore limite $L \in \mathbb{R}$. In questo caso il sistema di intorni di L è formato dagli intervalli $I(L, \epsilon)$ di centro L e raggio ϵ, dove ϵ varia nei numeri reali strettamente positivi. Allora abbiamo:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$
se e solo se per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\bar{n} \geq n_0$ tale che per ogni $n > \bar{n}$, $a_n \in I(L, \epsilon)$ (cioè, equivalentemente, $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$).

• Supponiamo che $L = +\infty$; In questo caso gli intorni di $+\infty$ sono le semirette $(m, +\infty)$, con m che varia in $\mathbb{R}$. Allora abbiamo: $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se e solo se per ogni numero reale m , esiste $\bar{n} \geq n_0$ tale che per ogni $n > \bar{n}$, $a_n \in (m, +\infty)$ (cioè $a_n > m$).

• Supponiamo che $L = -\infty$; in questo caso gli intorni di $-\infty$ sono le semirette $(-\infty, m)$, con m che varia in $\mathbb{R}$. Allora abbiamo:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$
se per ogni numero reale m, esiste $\bar{n} \geq n_0$ tale che per ogni $n > \bar{n}$, $a_n \in (-\infty, m)$ (cioè $a_n < m$).

Se esiste $L \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$
diremo che la successione è *convergente (in* $\overline{\mathbb{R}}$*)* o anche che è *regolare.* Se un tale L non esiste diremo che la successione è *irregolare.*

Esempi

(1) Sia $a_n = n$, definita per $n \geq 0$. Allora $a_n \to +\infty$. Infatti, per ogni reale m esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > m$ (proprietà di Archimede), quindi per ogni $n > \bar{n}$ si ha che $n = a_n > m$.

(2) Sia $a_n = \min(n, 700)$, definita per $n \geq 0$. Allora $a_n \to 700$. Infatti, per ogni $\epsilon > 0$, sia $\bar{n} = 699$. Allora per ogni $n > \bar{n}$, $a_n = 700 \in I(700, \epsilon)$. In generale ogni successione definitivamente costante e uguale a $L \in \mathbb{R}$ tende a L per n che tende a infinito.

(3) Sia $a_n = 1/n$, definita per $n \geq 1$. Allora $a_n \to 0$. Infatti per ogni $\epsilon > 0$, $1/n = |1/n| < \epsilon$ se e solo se $n > 1/\epsilon$. Per la proprietà di Archimede, esiste $\bar{n} > 1/\epsilon$, e per ogni $n > \bar{n}$, $1/n = |1/n| < 1/\bar{n} < \epsilon$. Dunque a_n appartiene definitivamente a $I(0, \epsilon)$.

(4) La successione $a_n = (-1)^n$, definita per $n \geq 0$ è irregolare. Infatti $L = \pm\infty$ non è valore limite perché la successione è limitata. Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$. Sia $\delta = \min(2 = |-1-1|, |1-L|, |1+L|)$. Poniamo $\epsilon = \delta/3$. Allora a_n appartiene frequentemente a $I(1, \epsilon)$ e a $I(-1, \epsilon)$, quindi non può appartenere definitivamente a $I(L, \epsilon)$ e nessun L può essere valore limite di a_n.

3.1. **Proprietà dei limiti di successioni.** Discutiamo alcune proprietà che sono conseguenza della definizione di limite.

Unicità del limite. *Data una successione* $a : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$*, se* $L \in \overline{\mathbb{R}}$ *è tale che*

$$L = \lim_{n \to +\infty} a_n,$$

allora L è l'unico valore limite di a_n in $\overline{\mathbb{R}}$. Pertanto scriveremo anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ intendendo che L è "il" limite della successione per n che tende all'infinito.

Infatti, supponiamo per esempio che $L \in \mathbb{R}$ e facciamo vedere che non esiste un antro limite $L' \in \mathbb{R}$. Infatti sia $\epsilon = |L - L'|/3$ per cui $I(L, \epsilon) \cap I(L', \epsilon) = \emptyset$. Allora a_n non può stare definitivamente in entrambi gli intorni $I(L, \epsilon)$ e $I(L', \epsilon)$. Facciamo vedere che neanche $L' = +\infty$ può essere limite della successione. Infatti, fissiamo $\epsilon > 0$ e poniamo $M = L + 3\epsilon$. Allora $I(L, \epsilon) \cap (M, +\infty) = \emptyset$ e ancora una volta a_n non può stare definitivamente in entrambi gli intorni. Gli altri casi per cui $L = \pm\infty$ si trattano in modo simile .

Permanenza del segno.
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $L \neq 0$, allora a_n ha definitivamente lo stesso segno di L (dove conveniamo che $+\infty > 0$ e $-\infty < 0$).

Infatti, supponiamo per esempio che $L \in \mathbb{R}$ e $L > 0$. Poniamo $\epsilon = L/3$. Se $x \in I(L, \epsilon)$, allora $x > 0$ e a_n appartiene definitivamente a $I(L, \epsilon)$. Gli altri casi si trattano in modo simile.

Sottosuccessioni. Data una successione

$$a : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$$

una *sottosuccessione* di a (detta anche una *successione estratta* da a) è una successione

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

tale che esiste una successione *crescente*

$$j : \mathbb{N} \to \{n \geq n_0\}$$

per cui b risulta essere la composizione

$$b = a \circ j \ .$$

I termini della successione b vengono spesso indicati a_{j_n}, $n \in \mathbb{N}$, dove $j_n = j(n)$. Ad esempio se $a_n = n$ e $j(n) = 2n$, allora $a_{j_n} = 2n$, cioè la sottosuccesione è formata dai termini pari di a. Se $a_n = (-1)^n$, e $j(n) = 2n$, allora a_{j_n} è la successione costante uguale a 1.

Se $a_n \to L \in \overline{R}$ e a_{j_n} è una sottosuccessione di a, allora $a_{j_n} \to L$. In altre parole: una sottosuccessione di una successione convergente è a sua volta convergente e le due successioni hanno lo stesso limite.

Infatti, dato un intorno U di L, sia $\bar{n} \geq n_0$ tale che per ogni $n > \bar{n}$, $a_n \in U$. Poiché j è crescente, esiste $n_1 > 0$ tale che $j(n_1) > \bar{n}$. Quindi per ogni $n > n_1$, $a_{j_n} \in U$.

Attenzione, una successione irregolare (per esempio $a_n = (-1)^n$) può avere sottosuccessioni convergenti (per esempio la successione costante $(-1)^{2n} = 1$).

Proprietà algebriche dei limiti. Sono familiari le operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{R}$. Inoltre se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ è definito l'inverso $1/a \in \mathbb{R}$. Prima di enunciare le proprietà algebriche dei limiti di successioni, estendiamo *parzialmente* queste nozioni alla retta estesa nel modo seguente:

- Se $a \in \mathbb{R}$ o $a = +\infty$, poniamo $+\infty + a = a + +\infty = +\infty$.
- Se $a \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$, poniamo $-\infty + a = a + -\infty = -\infty$.
- Poniamo $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.
- Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, poniamo $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$. Se $a < 0$, poniamo $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$.
- Poniamo $1/\pm\infty = 0$.

Attenzione: NON abbiamo definito $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$. Queste sono dette *forme indeterminate*. Anche ∞/∞ (dove i due simboli ∞ possomo prendere indipendentemente i valori $\pm\infty$), è una forma indeterminata perché possiamo scrivere $\infty/\infty = \infty \cdot (1/\infty) = \infty \cdot 0$ e ricondursi così ad una forma indeterminata già vista.

Possiamo adesso enunciare alcune proprietà algebriche dei limiti di successioni.

(1) **(Limite di una somma di successioni.)** Siano $a, b : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$ due successioni. Supponiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L' \in \overline{\mathbb{R}}$$
e che $L + L'$ è definito (cioè non è una forma indeterminata). Allora
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = L + L' \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

(2) **(Limite di un prodotto di successioni.)** Siano $a, b : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$ due successioni. Supponiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L' \in \overline{\mathbb{R}}$$
e che $L \cdot L'$ è definito (cioè non è una forma indeterminata). Allora
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot L' \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

(3) **(Limite della successione degli inversi.)** Sia $a : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$ una successione e supponiamo che per ogni $n \geq n_0$, $a_n \neq 0$. Supponiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$$
e che $1/L$ sia stato definito qui sopra. Allora
$$\lim_{n\to+\infty} 1/a_n = 1/L \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

(4) Nella situazione del punto precedente, supponiamo che $L = 0$. In generale non possiamo dire niente sulla convergenza della successione $1/a_n$. Per esempio sia $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, definita per ogni $n \geq 1$. Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (verificarlo per esercizio usando direttamente la definizione di limite), mentre la successione $1/a_n = (-1)^n n$ è irregolare. Possiamo dire qualcosa se facciamo un' ipotesi più forte, supponiamo cioè che tutti i termini a_n abbiano definitivamente lo stesso segno '$+$ o $-$ (scriveremo che $a_n \to 0^{\pm}$). Allora
$$\lim_{n\to+\infty} 1/a_n = \pm\infty \ .$$
In particolare
$$\lim_{n\to+\infty} 1/|a_n| = +\infty \ .$$
In altre parole non abbiamo definito $1/0$, ma abbiamo definito $1/0^{\pm} = \pm\infty$, e in questo modo possiamo unificare questi due ultimi punti (3) e (4).

A titolo di esempio dimostriamo l'affermazione sul limite della somma nel caso in cui $L, L' \in \mathbb{R}$. Fissiamo $\epsilon > 0$, vogliamo dimostrare che $(a_n + b_n)$ appartiene definitivamente all'intorno $I(L + L', \epsilon)$. Se a_n appartiene definitivamente a $I(L, \epsilon_1)$ e b_n appartiene definitivamente a $I(L', \epsilon_2)$ allora $a_n + b_n$ appartiene definitivamente $I(L + L', \epsilon_1 + \epsilon_2)$, perché definitivamente:

$$|(L + L') - (a_n + b_n)| \leq |L - a_n| + |L' - b_n| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \ .$$

Per concludere basta prendere per esempio $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/3$.

Esempi. I seguenti limiti si ottengono applicando diverse tra le proprietà algebriche viste sopra (per esercizio dettagliare quali).

(1) Per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, allora$a_n := n^k \to +\infty$; se invece $k < 0$, allora $a_n := n^k \to 0$.

(2) Fissati numeri reali a, b, c, d, $c \neq 0$, allora $a_n := \dfrac{an + b}{cn + d} \to \dfrac{a}{c}$.

(3) Sia $a_n = n^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j n^j$, dove i numeri reali c_j sono certi coefficienti fissi. Possiamo riscrivere $a_n = n^m(1 + \sum_{j=0}^{m-1} c_j(1/n^{m-j})$. Si ha che $a_n \to +\infty$.

Confronto di successioni. In certi casi si possono ricavare informazioni sulla convergenza di una successione "confrontandola" con altre successioni di cui il comportamento sia noto.

Confronto 0. Due successioni che sono definitivamente uguali hanno lo stesso comportamento per $n \to +\infty$, cioè l'una converge se e solo se l'altra convege e se sono convergenti allora hanno lo stesso limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Questo è chiaro perché la definizione di limite usa solo proprietà che devono valere definitivamente.

Confronto 1. Siano $a : \{n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$ e $b : \{n \geq n_1\} \to \mathbb{R}$ due successioni. Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$$

e che definitivamente $a_n \geq b_n$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \ .$$

Analogamente se

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$$

e definitivamente $a_n \leq b_n$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \ .$$

Confronto 2. Siano a,b,c tre successioni. Supponiamo che:

1) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$;

2) Definitivamente $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Allora:

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = L \ .$$

Questo risultato è anche noto come "teorema dei carabinieri" (a e b) che tenendo dai due lati il ladro (c) lo portano con loro in prigione (L).

Esempi.

(1) Fissato un reale $a > 1$, allora $a_n := a^n \to +\infty$. Infatti possiamo scrivere $a = 1 + b$, $b > 0$. Sappiamo (Bernoulli) che $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + bn$. Poiché $1 + bn \to +\infty$, lo stesso vale per a^n.

(2) Come in (1) ma supponendo ora $0 < |a| < 1$. Ne segue che $1/|a| > 1$, quindi $|a^n| = 1/(1/|a|)^n \to 0$.

(3) Fissato come prima $a > 1$, allora $a^{1/n} \to 1$. Infatti possiamo porre $a^{1/n} = 1 + b_n$ con $b_n > 0$. Allora (Bernoulli) $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$, da cui $0 < b_n \leq (a - 1)/n$. Per i "carabinieri" $b_n \to 0$ e quindi $a^{1/n} \to 1$.

(4) Fissato a, $|a| \leq 1$, allora $a^n/n \to 0$. Infatti se $|a| < 1$, $a^n \to 0$ e quindi $a^n/n \to 0$. Se $|a| = 1$, si ha che $0 \leq |a^n/n| \leq 1/n$. Per i "carabinieri", $a^n/n \to 0$.

(5) Come in (4) ma supponendo ora che $a > 1$. Allora $a = 1 + d$ per qualche $d > 0$.

$$a^n = (1+d)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^k \geq \binom{n}{2} d^2 = n(n-1)d^2/2$$

da cui

$$a^n/n \geq (n-1)d^2/2 \ ;$$

poiché $(n-1)d^2/2 \to +\infty$, lo stesso vale per a^n/n.

Convergenza delle successioni monotone.

Le successioni monotone sono sempre regolari cioè ammettono sempre limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Infatti, supponiamo che la successione a_n, definita per $n \geq n_0$, sia non decrescente (risp. non crescente). Allora si hanno due possibilità

1) a_n è superiormente (risp. inferiormente) limitata con estremo superiore (risp. inferiore) $L = \sup\{a_n |\ n \geq n_0\} \in \mathbb{R}$ (risp. $L = \inf\{a_n |\ n \geq n_0\} \in \mathbb{R}$) . Allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

2) a_n non è superiormente (risp. inferiormente) limitata. Allora: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ (risp. $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$).

Dimostriamo per esempio la prima affermazione nel caso in cui la successione è non decrescente e superiormente limitata. Per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n} \geq n_0$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \epsilon$. Siccome la successione è non decrescente, per ogni $n > \bar{n}$, $a_n \geq a_{\bar{n}}$, quindi $a_n > L - \epsilon$, da cui $a_n \in I(L, \epsilon)$. Gli altri casi si trattano in modo analogo.

Esempio importante: il numero di Nepero. Consideriamo la successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ definita per $n \geq 1$. Dimostriamo intanto che è una successione crescente. Infatti

$$a_n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} = \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-h-1)}{n^h}$$

da cui, riorganizzando l'ultimo termine

$$a_n = \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{h-1}{n}) \ .$$

Se ora ripetiamo il calcolo per a^{n+1} vediamo che ognuno dei termini (che sono positivi) della somma al secondo membro non diminuisce e il numero di termini aumenta. Quindi possiamo concludere che

$$a_n < a_{n+1} \ .$$

Vediamo ora che la successione a_n è superiormente limitata. Infatti

$$(1 + \frac{1}{n})^n < \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} < 1 + (\sum_{s=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^s < 1 + 1/(1 - \frac{1}{2}) = 3 \ .$$

Dunque la successione a_n converge al suo estremo superiore in $\mathbb{R}$ che viene indicato con la lettera e ed è chiamato il *numero di Nepero*. Riassumendo

$$e := \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

che è un numero reale $2 < e < 3$.

Un'applicazione pratica. Questo limite notevole interviene per analizzare una situazione molto concreta, cioè il comportamento di un *libretto di risparmio a tasso fisso.* Disponendo di un capitale c_0 che prevediamo di non utilizzare per un tempo abbastanza lungo, possiamo aprire un libretto di risparmio con capitale iniziale c_0, e farlo crescere grazie agli *interessi composti* maturati nel tempo. Il meccanismo è il seguente:

- E' fissato un intervallo di tempo (un anno, sei mesi,...) che possiamo prendere come *unità di misura del tempo* fissata una volta per tutte; si conviene che per maturare l'interesse alla fine di un tale intervallo, il capitale presente nel libretto all'inizio dell' intervallo è *vincolato*, cioè non può essere toccato per tutta la durata dell'intervallo.
- E' fissato un tasso di interesse fisso del p_0 per cento (per esempio del 1 per cento). Poniamo $r_0 = p_0/100$.
- Allora al tempo iniziale $t = 0$, abbiamo un capitale $c(0) = c_0$. Al tempo $t = 1$ si maturano gli interessi e si determina il nuovo capitale $c(1) = (1 + r_0)c(0)$; procedendo per induzione, al tempo $t = n$, abbiamo un capitale
$$c(n) = (1 + r_0)c(n - 1) = (1 + r_0)^n c_0 \ .$$

In questo modello sia l'ampiezza dell'intervallo di tempo in cui il capitale è vincolato, sia il tasso di interesse sono parametri che possono essere modificati. E' chiaro che in linea di principio il tasso di interesse deve essere una funzione crescente dell'ampiezza dell'intervallo di tempo: più è il tempo che il capitale è bloccato, più deve crescere l'interesse. In accordo con un ragionevole "criterio di semplicità", adottiamo il seguente modello "lineare":

Per l'intervallo unitario poniamo $r_0 = 1$; se l'intervallo di vincolo è lungo $\lambda > 0$ (rispetto all'unità di misuira che abbiamo scelto) allora il corrispondente tasso di interesse è $r = \lambda$.

Calcolando tutto come prima ma tenendo conto del parametro reale λ (e avendo posto $r_0 = 1$), vediamo che al solito $c(0) = c_0$, mentre
$$c(n\lambda) = (1 + \lambda)c((n - 1)\lambda) = (1 + \lambda)^n c_0 \ .$$
E' interessante capire cosa succede quando $\lambda \to +\infty$ oppure $\lambda \to 0^+$ e $n \to +\infty$. Concretamente, consideriamo la successione crescente e non limitata $\lambda_n = n$. Vediamo allora che la già la successione dei capitali maturati al tempo λ_n:
$$c(\lambda_n) = (1 + n)c_0$$
è crescente e diverge a $+\infty$. Questo non è sorprendente. Un comportamento più interessante si ha prendendo la successione $\lambda_n = 1/n$ decrescente e converge a 0 e consideriamo la successione dei capitali maturati al tempo $n\lambda_n = 1$. Si ha:
$$c(n\lambda_n) = (1 + \frac{1}{n})^n c_0 \ .$$
Possiamo quindi applicare l'analisi del limite notevole fatta sopra e concludere che $c(n\lambda_n)$ è ancora una successione crescente che però adesso converge al limite finito ec_0, dove e è proprio la costante di Nepero.

Criterio di Cauchy.

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista $L \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to L \in \mathbb{R}$ è che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n} \geq n_0$ tale che per ogni $n, m > \bar{n}$ si ha che $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Limitiamoci a dimostrare che la condizione è necessaria. Supponiamo che $a_n \to L \in \mathbb{R}$. Fissato $\epsilon > 0$, esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$, $a_n \in I(L, \epsilon/3)$. Allora per ogni $n, m > \bar{n}$, $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Criterio del rapporto.

Sia a_n una successione a termini positivi. Se $a_{n+1}/a_n \to L \in \mathbb{R}$ e $L < 1$ allora a_n è descrescente e $a_n \to 0$. Se $a_{n+1}/a_n \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $L > 1$, allora a_n è crescente e $a_n \to +\infty$. Se $a_{n+1}/a_n \to 1$ la situazione è indeterminata.

Criterio della radice

Sia a_n una successione a termini positivi. Se $(a_n)^{1/n} \to L \in \mathbb{R}$ e $L < 1$ allora $a_n \to 0$. Se $(a_n)^{1/n} \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $L > 1$, allora $a_n \to +\infty$. Se $(a_n)^{1/n} \to 1$ la situazione è indeterminata.

Dimostriamo il criterio della radice: supponiamo che $L > 1$ e $L \in \mathbb{R}$. Allora definitivamente $(a_n)^{1/n} \geq (L+1)/2$, quindi $a_n \geq ((L+1)/2)^n$; $a := (L+1)/2 > 1$, quindi $a^n \to +\infty$ e per confronto $a_n \to +\infty$. Lasciamo per esercizio il caso in cui $L = +\infty$. Se $L < 1$, allora definitivamente $(a_n)^{1/n} \leq (L+1)/2$, quindi $0 < a_n \leq ((L+1)/2)^n$; $a := (L+1)/2 < 1$, quindi $a^n \to 0$. Per i "carabinieri" anche $a_n \to 0$.

Osservazione. Quando diciamo che se $L = 1$ la situazione è indeterminata vogliamo dire che si danno effettivanente comportamenti diversi. Infatti per esempio a_n può essere convergente in $\mathbb{R}$ (si consideri per esempio la successione costante uguale ad 1), convergente a $+\infty$ (si consideri $a_n = n+1$ definita per $n \geq 0$, allora $a_{n+1}/a_n \to 1$).

Limiti delle medie. Sia a_n una successione definita per $n \geq 1$. La successione m_n delle *medie aritmetiche* dei termini di a_n è definita da

$$m_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n \ .$$

Vale il seguente fatto:

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, *allora* $\lim_{n\to+\infty} m_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Supponiamo ora che la successione a_n sia a termini positivi. La successione g_n delle *medie geometriche* dei termini di a_n è definita da

$$g_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{1/n} \ .$$

Vale il seguente fatto:

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, *allora* $\lim_{n\to+\infty} g_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

In altre parole: *se una successione converge in* $\overline{\mathbb{R}}$, *allora anche le successioni delle medie (aritmetiche e geometriche) sono convergenti e hanno lo stesso limite.*

Osservazione. Sia a_n una successione a termini positivi, definita per $n \geq 0$ e tale che $a_0 = 1$. Consideriamo la successione dei rapporti $b_n = a_n/a_{n-1}$ definita per $n \geq 1$. In questo caso la successione delle medie geometriche dei termini di b_n è uguale a $(a_n)^{1/n}$. Quindi come caso particolare di quanto visto prima, abbiamo che:

Data una successione a termini positivi a_n, *se* $a_{n+1}/a_n \to L \in \overline{\mathbb{R}}$, *allora* $(a_n)^{1/n} \to L$.

Come corollario abbiamo che *"il criterio del rapporto implica il criterio della radice".*

Per esempio, $n/(n-1) \to 1$ e quindi $(n)^{1/n} \to 1$.

4. Serie, cenni

Data una successione a_n, definita per $n \geq 0$, possiamo definire una nuova successione

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \ .$$

Diciamo allora che queste s_n sono le *somme parziali della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

e che gli a_n sono i termini della serie. Una serie è detta *regolare* se esiste $L \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = L$$

convergente se è regolare e $L \in \mathbb{R}$. Altrimenti la serie è detta *irregolare*. Se la serie è convergente allora scriviamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$$

ed L è per definizione la *somma della serie*.

Un esempio importante è la *serie geometrica* che di fatto è già intervenuta, per esempio, quando abbiamo trattato gli sviluppi decimali. Fissiamo $a \in \mathbb{R}$. Allora e consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \ .$$

Abbiamo visto che se $a \neq 1$ allora

$$s_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \ .$$

Quindi se $0 < a < 1$ allora la serie è convergente e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1/(1 - a) \ .$$

Se $a = 1$, a_n è la successione costante uguale a 1, $s_n = 1 + n \to +\infty$. Se $a > 1$, allora $s_n \to +\infty$.

Un altro esempio (serie di Mengoli):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

poiché

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

risulta che

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

quindi la serie è convergente e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 \ .$$

4.1. **Serie a termini positivi.** Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e supponiamo che per ogni n, $a_n \geq 0$. Allora sicuramente s_n è una successione monotona non decrescente e quindi:

Ogni serie a termini positivi è regolare e $s_n \to L \geq 0$ in $\overline{\mathbb{R}}$. La serie è convergente se e solo se s_n è (superiormente) limitata.

Si ha che:
Condizione necessaria affinché una serie a termini positivi sia convergente è che $a_n \to 0$.

Infatti per ogni n, $a_n = s_n - s_n - 1$, se $s_n \to L \in \mathbb{R}$, allora $a_n \to L - L = 0$.

Tale condizione non è però sufficiente: si consideri la serie *armonica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \ .$$

Se per assurdo $s_n \to L \in \mathbb{R}$, la successione delle somme parziali dovrebbe verificare la condizione (necessaria) del criterio di Cauchy visto sopra. Ma questa non è verificata perché per ogni $n \geq 0$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} s_k > n \cdot \frac{1}{2n} = 2 \ .$$

Fissiamo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e consideriamo la serie (*armonica generalizzata*)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} \ .$$

Ne vogliamo studiare il comportamento al variare di a. Se $a = 1$ ritroviamo il caso già studiato. Se $a < 1$, allora per ogni n

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(1+n)^a}$$

quindi per confronto anche $s_n \to +\infty$. Invece se $a > 1$ la serie è convergente. Infatti si può verificare che per ogni intero $p > 1$

$$s_{2^p-1} < \sum_{j=0}^{2(p-1)} ((1/2)^{a-1})^j \ .$$

Poiché $a > 1$ il secondo membro della disuguaglianza è una somma parziale di una serie geometrica convergente. D'altra parte, per ogni n esiste p tale che $s_n < s_{2^p-1}$, quindi la successione s_n è limitata e la serie converge.

Criteri del rapporto e della radice per serie. Sono riformulazioni di quanto già visto per le successioni.

Data una serie a termini positivi, se $a_{n+1}/a_n \to L < 1$ *allora la serie è convergente; se* $a_{n+1}/a_n \to L > 1$ *la serie è regolare ma non convergente; se* $a_{n+1}/a_n \to 1$ *la situazione è indeterminata.*

Poiche' se la serie converge allora $a_n \to 0$, questo induce il criterio del rapporto per le successioni gia' considerato.

Data una serie a termini positivi, se $(a_n)^{1/n} \to L < 1$ *allora la serie è convergente; se* $(a_n)^{1/n} \to L > 1$ *la serie è regolare ma non convergente; se* $(a_n)^{1/n} \to 1$ *la situazione è indeterminata.*

Nota bene: Alcuni dei fatti descritti in questa dispensa sono ripresi ed approfonditi in [LIMSUCC].