3 Novembre 2014

Qualche limite e serie standard svolti.

Indice

Queste note contengono lo studio di qualche limite e di qualche serie trattato nel corso con qualche suggerimento per richiamare le idee delle prove.

1 Successioni

1.1 Confronti di crescita di esponenziali.

Abbiamo visto, come conseguenza della diseguaglianza di Bernoulli, che la successione a^n per $a > 1$ diverge, mentre converge a 0 se $|a| < 1$ e non ha limite se $a < -1$. Confrontiamola, quando diverge, con qualche altra successione, anche essa divergente.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty \text{ con } a > 1 \text{ e } k > 0$$

  L'idea per comprendere il comportamento di questa successione è di confrontarla con una successione di coefficienti binomiali. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k+1} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$ è un polinomio in n di grado $k+1$, pertanto

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k+1}}{n^k} = \infty$$

Quindi per n abbastanza grande, diciamo $n \geq k+1$

$$a^n = (1+(a-1))^n = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n}{h}(a-1)^h > \binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1}$$

Quindi si ha $\dfrac{a^n}{n^k} > \dfrac{\binom{n}{k+1}}{n^k}(a-1)^{k+1}$ e pertanto, se $a>1$ e $k>0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$$

-
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \text{ con } a > 1$$

  Si ottiene osservando che

  - $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$ perché se $n \geq k+1$ $n! \geq n(n-1)\cdots(n-k)$ e quindi $\dfrac{n^k}{n!} \leq \dfrac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)} \to 0$
  - $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ perché $\dfrac{n}{n}\dfrac{n}{n-1}\cdots\dfrac{n}{1} > n$

  e osservando che tutti i fattori $\dfrac{a}{n}$ con $n > [a]$ sono minori di 1, quindi $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a}{n}\dfrac{a}{n-1}\cdots\dfrac{a}{1}$. la quantità a secondo membro risulta essere una costante $C(a)$, che dipende solo da a, per $\frac{a}{n}$ che tende a 0. $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a}{n}\dfrac{a}{n-1}\cdots\dfrac{a}{1} = C(a)\dfrac{a}{n}$.

Possiamo riassumere quanto visto dicendo che *definitivamente* si ha, se $a > 1$ e k intero positivo fissato,

$$n^k < a^n < n! < n^n.$$

1.2 Qualche criterio

- *La successione* $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ *ha lo stesso comportamento della successione* a_n*; in particolare se* $a_n \to l$ *allora anche* $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n} \to l$*. Come conseguenza si ha che* $\dfrac{\log n!}{n}$ *diverge.*

  Diamo un cenno della dimostrazione solo per il caso $l = 0$ lasciando al lettore la cura di trattare gli altri casi e di evidenziare i dettagli anche per il caso che diamo.

  Indichiamo con $b_n = \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$: vogliamo mostrare che $b_n \to 0$. Sappiamo che $a_n \to 0$ e quindi che fissato un ε esiste un n_0 tale che per $n >$

n_0 $|a_n| < \varepsilon$. Il termine b_k della successione è somma di due termini $b_k = \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots a_k}{k} = \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{k} + \dfrac{a_{n_0+1} + \ldots a_k}{k} = b_k^1 + b_k^2$ Ora il termine b_k^2 viene maggiorato da $\varepsilon \frac{k-n_0}{k}$, quantità quest'ultima che tende ad 1; facendo crescere opportunamente k si ottiene che, essendo n_0 fissato, anche il termine b_k^1 diventa definitivamente piccolo, diciamo minore di ε. Quindi in definitiva il termine b_k diviene definitivamente piccolo.[1]

- *Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Se $l < 1$ allora $a_n \to 0$, se $l > 1$ allora $a_n \to \infty$.*

  Se $l < 1$ si può scegliere un ε in modo che $l + \varepsilon < 1$. Indichiamo con $M = l + \varepsilon$. Per definizione di limite si ha che per $n > \nu$, $|\frac{an+1}{a_n}| < M$, quindi si ha che definitivamente $a_{n+1} < M a_n$ e cioè che per $n > \nu$ $|a_{n+\nu}| < M^\nu a_\nu$. La tesi si ottiene dal fatto che essendo $M < 1$ $M^j \to 0$ e per confronto $a_{m+\nu} \to 0$.

- *Sia a_n una successione. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora anche $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.*

  Ripercorrere la prova precedente osservando che definitivamente (cioè per $n > \nu$) $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l| < \varepsilon$ da cui si ha che definitivamente vale

  $$(l - \varepsilon)a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon).$$

  Quindi ricorsivamente otteniamo

  $$(l - \varepsilon)^m a_\nu < a_{m+\nu} < (l + \varepsilon)^m a_\nu.$$

  Prendendo le radici $(m + \nu)$-esime si ha

  $$(l - \varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} a_\nu^{\frac{1}{m+\nu}} \leq (a_{m+\nu})^{\frac{m}{m+\nu}} \leq (l + \varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} a_\nu^{\frac{1}{m+\nu}}.$$

  Da questo si conclude osservando che $a_\nu^{m+\nu} \to 1$, $(l - \varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} \to l + \varepsilon \ldots$ e che quindi definitivamente si ha

  $$l - 2\varepsilon < a_j^{\frac{1}{j}} < l + 2\varepsilon$$

  per cui converge a l.

1.3 Altri confronti.

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ Calcolare

---

[1]Se $l \neq 0$ basta osservare che la successione $a'_n = a_n - l$ tende a 0 e che $b'_n = \dfrac{a'_1 + \ldots + a'_n}{n} = \dfrac{a_1 - l + \ldots + a_n - l}{n} = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} - l$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n$

1.4 Varie.

Determinare il comportamento delle successioni seguenti

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n-1)}$

  Sol. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n-1)(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n-1)+\log(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} = 1+\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} = 1+\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\log(1+\frac{2}{n-1})}{(n-1)\log(n-1)} = 1+\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{2}{n-1})^{n-1}}{(n-1)\log(n-1)} = 1+\lim_{n\to\infty} \frac{\log e^2}{(n-1)\log(n-1)} = 1$

- Sulla base dell'esempio precedente calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(an+b)}{\log(cn+d)}$ o più in generale $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(P(n))}{\log(Q(n))}$ ove P e Q sono due polinomi di gradi rispettivamente p e q.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

  Sol. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

- Se $0 < a < b$ allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$ perché $b^n < a^n + b^n < 2b^n$, quindi $b \leq \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{2}b$ e per confronto il risultato.

1.5 Variazioni sulla successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Sappiamo che la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è convergente a un limite che è un numero reale compreso tra 2 e 3, numero che convenzionalmente si indica con e.

Qui di segito mostriamo qualche manipolazione che permette di ricondurre il calcolo di alcuni limiti a quello della successione iniziale. [2]

[2] Attenzione: alcuni dettagli non sono esplicitati completamente; si invita pertanto lo studente a esplicitarli.

- Un limite che si calcola direttamente a partire dal limite di questa successione è

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (*)$$

Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

- Si vede immediatamente che se k è un intero fissato

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n = e \qquad (**)$$

Infatti

$$\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}}{\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^k}$$

La successione a numeratore converge ad e (perché?) e quella a denominatore, essendo k un intero fissato, converge ad 1.

Con un ragionamento del tutto analogo si prova anche che se k è un intero fissato si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = e.$$

- $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = e^a.$$

Quindi, in modo del tutto analogo a $(*)$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{b}$$

- A questo punto dovrebbe esser chiara la ragione e l'effetto delle manipolazioni nei due esempi seguenti.

  1. $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+5}{2n^2+4}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+4-4+5}{2n^2+4}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n^2+4}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n^2+4}\right)^{(2n^2+4)\cdot\frac{n^2}{2n^2+4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-5}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5+5+1}{3n-5}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n-5}\right)^{n-2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n-5}\right)^{\frac{3n-5}{6}\cdot\frac{6(n-2)}{3n-5}}=e^2$$

- Sia a_n una successione tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$. Proviamo che
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$
.

Prova (cenno). Il fatto che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ ci assicura che definitivamente $a_n>0$ e che la successione delle parti intere $[a_n]$ diverge ($a_n-1<[a_n]$).

Da qui abbiamo che, indicata con k_n la parte intera di $[a_n]$ [3], si ha
$$1+\frac{1}{k_n+1}<1+\frac{1}{a_n}\le 1+\frac{1}{k_n}$$
e di conseguena
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}<\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

Ora in modo del tutto analogo a quanto fatto in $(*)$, si osservi per la successione a sinistra che
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)}$$
Quindi la successione al numeratore converge ad e, essendo una *sottosuccessione* della successione convergente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, e la successione al denominatore converge a 1.

In modo analogo si vede che anche la successione a destra converge ad e, per cui per il teorema del confronto (carabinieri) si ha che la successione al centro converge ad e.

[3] ($k_n\le a_n<k_n+1$)

2 Serie

2.1 Qualche serie di base.

Avvertenza: le serie trattate in queste note si intenderanno sempre a termini positivi.

Come per le successioni, anche per le serie un metodo efficiente per determinarne la natura è quello di confrontarle con altre serie di cui si conosce il comportamento.

Serie numeriche che possono servire come confronto per stabilire la natura di altre serie sono

1. *La serie geometrica* $\sum a^n$
2. *La serie armonica* $\sum \frac{1}{n}$
3. *La serie armonica generalizzata* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

Questo appare evidente anche nella prova di due criteri analoghi a quelli del rapporto e della radice provati per le successioni.

Criteri 2.1. *Sia* $\sum a_n$ *una serie a termini positivi. Allora*

- **(rapporto)***Sia* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Se* $l < 1$ *allora la serie converge, se* $l > 1$ *allora la serie diverge e nulla si puo' dire se* $l = 1$
- **(radice)***Sia* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. *Se* $l < 1$ *allora la serie converge, se* $l > 1$ *allora la serie diverge e nulla si puo' dire se* $l = 1$

La prova è del tutto analoga a quella degli analoghi criteri per le successioni. In particolare per il criterio del rapporto si noti che se $\frac{a_{n+1}}{a_n} < C$ si ha che $a_2 < Ca_1, a_3 < C^2a_1, \ldots, a_{n+1} < C^n a_1$ e quindi la serie $\sum a_n$ può essere maggiorata, a meno del termine a_1, con una serie geometrica: $\sum a_n \le a_1 \sum C^n$. Da qui le conclusioni se $C < 1$.

Vediamo più da vicino il comportamento di queste serie. In particolare la serie geometrica è stata già trattata diffusamente in varie altre dispense: qui ripetiamo brevemente per completezza le considerazioni fatte al fine di stabilire la natura di questa serie.

1. *La serie geometrica* $\sum a^n$

   Ricordiamo che

$$(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) = 1 - a^{n+1}$$

da cui abbiamo immediatamente che

$$\sum_0^n a^j = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

e quindi che se $|a| < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-a}$ mentre diverge se $a \geq 1$ (e non converge se $a < -1$).

2. *La serie armonica* $\sum \frac{1}{n}$

   Per stabilire la natura di questa serie maggioriamo le ridotte spezzando opportunamente il numero di elementi su cui sommiamo.

$$1 < 1$$
$$\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{2} = 4\frac{1}{8} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{2} = 2^k \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots \frac{1}{2^k + 2^k - 1}$$

   Otteniamo quindi per la successione delle somme parziali dei termini fino al $2^{n+1} - 1$-esimo la minorazione

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} < 1 + \sum_2^{2^{n+1}-1} \frac{1}{n}$$

   per cui la serie armonica diverge.

3. *La serie armonica generalizzata.*

   Per studiare questa serie utilizziamo la stessa idea del punto precedente, cioè un opportuno spezzamento della lunghezza delle ridotte.

   Lemma 2.2. (Lemma di condensazione) *Sia a_n una serie a termini positivi decrescenti. Allora vale*

$$\sum_{j=0}^n 2^j a_{2^{j+1}} < \sum_{j=0}^n a_j < \sum_{j=0}^n 2^j a_{2^j}$$

   Prova. Procediamo in maniera analoga a quanto fatto per la serie armonica.

$$a_2 < a_1 < a_1$$

$$2a_4 < a_2 + a_3 < 2a_2$$

$$2^2 a_8 < a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 2^2 a_4$$

$$2^3 a_{16} < a_8 + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} < 2^3 a_8$$

$$\dots$$

$$2^j a_{2^{j+1}} < a_{2^j} + \quad \cdots \quad + a_{2^{j+1}-1} < 2^j a_{2^j}$$

Sommando otteniamo per le ridotte

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^{j+1}} < \sum_{j=0}^{n} a_j < \sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}$$

Applicando questo alla serie armonica generalizzata abbiamo

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j \frac{1}{2^{(j+1)\alpha}} < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{1}{2^{j\alpha}}$$

quindi $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^j$ e quindi essendo quest'ultima una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ converge se $\alpha > 1$

2.2 Serie telescopiche.

Un tipo di serie abbastanza agevoli da trattare sono le cosiddette *serie telescopiche,* cioè le serie della forma

$$\sum (a_k - a_{k+1})$$

in cui, volendo serie a termini positivi, dobbiamo supporre che la successione a_n sia decrescente. È immediato che per le somme parziali $\sigma_n = \sum_1^n (a_k - a_{k+1})$ risulta $\sigma_n = a_1 - a_{n+1}$ e quindi se $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ allora $\sum(a_k - a_{k+1}) = a_1 - c$. In particolare se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ risulta che $\sum(a_k - a_{k+1}) = a_1$.

Ovviamente valgono considerazioni analoghe per le serie il cui termine generale è positivo e del tipo $a_k - a_{k+\nu}$ rimpiazzando a_1 con la somma dei primi ν termini della successione a_j.

Vediamo alcuni esempi.

1. $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

   È immediato che questa serie converge a 1

2. $\sum \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}$. Serie telescopica in cui $a_n = \frac{1}{n^2}$

3. $\sum \frac{3}{n^2+3n}$.

   È immediato ricondursi a una serie telescopica osservando che $\frac{3}{n^2+3n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$.

4. $\sum \frac{k}{n^2+kn}$ con k numero intero.

5. $\sum \frac{1}{n^2-n}$.
Per la convergenza della serie basterebbe osservare che per $n > 2$ si ha $2n < n^2$ da cui $n^2 - n > \frac{n^2}{2}$ per cui $\frac{1}{n^2-n} < \frac{2}{n^2}$, serie quest'ultima che è convergente essendo una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1. Riconoscere il carattere telescopico ci permette in più di calcolarne la somma. $\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Calcolando le somme parziali otteniamo $\sigma_n = 1 - \frac{1}{n}$ e poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ abbiamo che la somma è 1.

2.3 Miscellanea.

Studiare il comportamento delle serie seguenti

1. $\sum \dfrac{n^2+1}{3^n}$
Convergente. Dal criterio del rapporto abbiamo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$.

2. $\sum \dfrac{7^n}{n!}$
Convergente. Dal criterio del rapporto.

3. $\sum \dfrac{n^n}{(2n+1)^n}$
Convergente. Dal criterio della radice.

4. $\sum 6^n \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{n^2}$
Convergente. Usando il criterio della radice abbiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 6e^{-3} < 1$.

5. $\sum \dfrac{n!}{n^n}$
Convergente. Criterio del rapporto.

6. $\sum (\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1})$. [4]
Osserviamo che per il termine generico si ha $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} \geq \dfrac{1}{2n}$. Pertanto la serie diverge essendo minorata da una serie armonica.

7. $\sum \dfrac{n\sqrt{n}}{n^3+1}$
Convergente. Infatti operando manipolazioni algebriche sul termine generico otteniamo $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^3+1} = \dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3+1} \leq \dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. La serie $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge poiché è una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1.

[4] Attenzione, questa serie non è telescopica.

8. $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{n^3+1}$

   Convergente. Per il termine generico vale $a_n \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^3} = \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}$ e quindi la serie può essere maggiorata con una serie armonica convergente perché $\frac{5}{2} > 1$.

9. $\sum \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$.

   Divergente. Operando sul termine generico otteniamo $\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}} \geq \frac{2n}{\sqrt{n^3+n^3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}}}$ e poiché $\frac{1}{2} < 1$ la serie armonica generalizzata diverge.

10. $\sum \frac{n!}{n^n}$

11. $\sum \big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big)^{\sqrt{n^3}}$

12. $\sum \frac{\log n!}{n^3}$

13. $\sum \frac{\log n}{n^2}$

    Osserviamo che $\frac{\log n}{n^2} < \frac{n}{n^2}$ e che questa serie diverge essendo la serie armonica. Se tentiamo di ottenere informazioni dal criterio del rapporto abbiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{\log n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ e entrambi i termini del prodotto convergono a 1. Quindi entrambi i tentativi falliscono.

    Proviamo con il criterio di condensazione. Otteniamo $a_{2^n} = \frac{\log(2^n)}{2^{2n}} = \frac{n \log 2}{2^{2n}}$ quindi $\sum a_n \leq \sum 2^n a_{2n} = \sum \frac{n \log 2}{2^n}$. Quindi a meno del termine $\log 2$ siamo ricondotti a studiare il carattere della serie $\sum \frac{n}{2^n}$ cosa che si fa in modo agevole con il criterio della radice poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$. Quindi in definitiva la serie data converge perché tramite il criterio di condensazione si riesce a maggiorare con una serie convergente.