15 Dicembre 2014

Equazioni differenziali lineari.

Indice

1 Introduzione.

In questa nota esponiamo alcuni metodi per il trattamento delle equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine qualsiasi, omogeneee e non omogeneee, cioè delle equazioni del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t).$$

Anche se particolare rilievo sarà dato al caso in cui i coefficenti sono costanti, cioè quando gli a_i sono numeri reali, alcune cose, come ad esempio la ricerca di soluzioni particolari, valgono anche quando le a_i non sono costanti ma funzioni della variabile t.
Il caso delle equazioni al primo ordine, lineari o no, è stato ampiamente trattato nella Nota [EquaD1] a cui faremo sempre riferimento.
Inizieremo quindi con il caso delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, caso che per l'iportanza delle sue applicazioni (oscillatori, moto armonico etc.) trattiamo direttamente, senza formalmente fare ricorso esplicito ad argomenti di Algebra Lineare, anche se perfettamente deducibile dalla trattazione generale.
Questo ed il caso del primo ordine renderanno, forse, più chiare alcune procedure che vedremo subito dopo in cui faremo ricorso sistematicamente ad argomenti di Algebra Lineare introdotti nel corso parallelo di Geometria: vedremo infatti che l'Algebra Lineare fornisce un ottimo linguaggio e ottimi metodi per trattare le equazioni differenziali lineari, in particolar modo quelle a coefficienti costanti,e che le analogie nel linguaggio fin qui incontrate hanno una loro ragion d'essere.
Osserviamo ad esempio che la funzione e^{ax} è un autovettore di autovalore a della derivazione pensata come applicazione lineare di un opportuno spazio vettoriale in se. Non stupisce quindi, pensando ai teoremi di diagonalizzazione e agli argomenti collegati, che tali funzioni abbiano un ruolo così importante.
In effetti abbiamo visto nel caso del primo ordine e vedremo in quello del secondo che una base dello spazio delle soluzioni viene espressa in termini appunto di queste funzioni.
Dovrebbe essere anche chiaro a questo punto del corso il perché convenga trattare per prima cosa il caso omogeneo e poi quello generale: tra i vari metodi per la ricerca di una soluzione particolare illustreremo qui principalmente quello detto della *variazione delle costanti arbitrarie*, che è stato già incontrato nel caso dell'equazione lineare di ordine 1.
Ci serviranno anche alcune nozioni come quella di Massimo Comun Divisore tra polinomi che lo studente dovrebbe aver già incontrato ma che in ogni caso richiameremo in una appendice.

2 Dimensione dello spazio delle soluzioni di una equazione lineare omogenea.

Si è già visto che nel caso di una equazione lineare omogenea (sia che i coefficienti siano costanti sia che non lo siano) l'insieme delle soluzioni ha una struttura di spazio vettoriale, precisamente è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni differenziabili fino a un determinato ordine definite su un insieme D. Vogliamo mostrare che tale spazio ha dimensione finita, pari all'ordine n dell'equazione. [1]
Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Tale problema ammette una sola soluzione che indicheremo con w_1; analogamente indichiamo con w_i la soluzione del problema

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(i-1)}(x_0) = 1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo così individuato n funzioni $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ che sono linearmente indipendenti; infatti una eventuale relazione di dipendenza lineare si trasferirebbe per la linearità della derivazione, in una relazione di dipendenza lineare dei vettori

[1] **Attenzione.** Si faccia attenzione al fatto che talvolta nel seguito con la stessa scrittura si indicano cose dal significato profondamente diverso. Quando, ad esempio, si vuol provare che le funzioni e^t e e^{2t} sono linearmente indipendenti come elementi dello spazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R})$, significa che si vuol provare che se c_1, c_2 sono due costanti tali che $c_1e^t + c_2e^{2t} = 0$ allora $c_i = 0$. Lo 0 che compare nella scrittura indica lo 0 dello spazio vettoriale, cioè *la funzione nulla.* Si vuol provare quindi che *se per ogni* t *in* $\mathbb{R}$ $c_1e^t + c_2e^{2t} = 0$ *allora* $c_i = 0$ e NON si vuol risolvere l'equazione $c_1e^t + c_2e^{2t} = 0$ nella incognita t, cosa che significherebbe provare che esistono dei t in $\mathbb{R}$ per cui $c_1e^t + c_2e^{2t} = 0$.

$$\begin{pmatrix} w_1(x_0) \\ w_1'(x_0) \\ \\ \dots \\ w_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_2(x_0) \\ w_2'(x_0) \\ \\ \dots \\ w_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}, \dots\dots, \begin{pmatrix} w_n(x_0) \\ w_n'(x_0) \\ \\ \dots \\ w_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

che invece sono palesemente indipendenti per costruzione.
Analogamente si vede che tali funzioni formano anche un sistema di generatori. Se infatti w è una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea, indicate con $\alpha_i = w^{(i-1)}(x_0)$ si ha che w e $\sum \alpha_i w_i$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha_1 \\ y'(x_0) = \alpha_2 \\ \dots \\ y^{(i-1)}(x_0) = \alpha_i \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n \end{cases}$$

e quindi, per l'unicità della soluzione, coincidono.

3 Equazioni lineari del secondo ordine.

In questo paragrafo tratteremo le equazioni del secondo ordine lineari a coefficienti costanti. Anche se gli argomenti usati non si discosteranno molto da quelli per il caso generale del paragrafo successivo, formalmente qui non useremo argomenti di Algebra Lineare e quindi la cosa sarà accessibile anche agli studenti che non hanno quelle nozioni.
Partiamo dunque da una equazione del tipo

$$ay'' + 2by' + cy = 0$$

e come nel caso lineare vediamo se esistono soluzioni del tipo $y = e^{kt}$. Sostituendo nella equazione otteniamo che una tale soluzione esiste se k verifica la relazione

$$ak^2 + 2bk + c = 0$$

Questa equazione di secondo grado ha, a seconda del segno del suo discriminante $\Delta = b^2 - ac$ 2 soluzioni reali o complese coniugate o due soluzioni coincidenti nel caso che il discriminante Δ sia uguale a 0.
Nel caso $\Delta > 0$ se indichiamo con k_1 e k_2 le due radici reali, l'equazione di partenza avrà due soluzioni $e^{k_1 t}$ e $e^{k_2 t}$ ed ogni altra soluzione sarà del tipo $c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}$.

Nel caso che le due radici k_1 e k_2 coincidano nella radice k è facile vedere con una verifica diretta che oltre alla soluzione e^{kt} anche la funzione te^{kt} è soluzione. Tale funzione può esser vista, tramite il teorema dell'Hospital come il limite dell'integrale particolare $\dfrac{e^{k_2 t} - e^{k_1 t}}{k_2 - k_1}$ al tendere di k_2 a k_1.

Resta il caso del Δ negativo. Cerchiamo una soluzione del tipo $f(t)e^{kt}$. La derivata di $y = fe^{kt}$ è $f'e^{kt} + kfe^{kt}$ e la derivata seconda è $f''e^{kt} + 2kf'e^{kt} + k^2 fe^{kt}$ per cui sostituendo nell'equazione otteniamo

$$a(f''e^{kt} + 2kf'e^{kt} + k^2 fe^{kt}) + 2b(f'e^{kt} + kfe^{kt}) + cfe^{kt} =$$

$$= e^{kt}(af'' + 2(ak + b)f' + ak^2 + 2kb + c).$$

Quindi prendendo $k = -\dfrac{b}{a}$ otteniamo che la funzione $fe^{-\frac{b}{a}t}$ verifica la nostra equazione differenziale se la funzione f è tale che $f'' + \dfrac{-b^2 + ac}{a^2} f = 0$. Detto $\gamma^2 = \dfrac{-b^2 + ac}{a^2}$ soluzioni di $f'' = -\gamma^2 f$ sono $f = \cos\gamma t$ e $f = \sin\gamma t$.

Per cui una soluzione generale della equazione omogenea si ottiene

$$(c_1 \cos\gamma t + c_2 \sin\gamma t)e^{-\frac{b}{a}t}$$

con $\gamma = \sqrt{\dfrac{-b^2 + ac}{a^2}}$

Si poteva giungere a questa espressione delle soluzioni anche ricordando l'espressione dell'esponenziale complesso

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta).$$

In questo caso le radici del polinomio caratteristico sonocomplesse e coniugate e quindi anche

$$e^{\alpha - i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta - i\sin\beta)$$

è soluzione.

Le due radici del polinomio caratteristico in questo caso sono $k_1 = -\dfrac{b}{a} + i\dfrac{\sqrt{-b^2 + ac}}{a}$ e $k_2 = -\dfrac{b}{a} - i\dfrac{\sqrt{-b^2 + ac}}{a}$ per cui sommando e sottraendo le due espressioni riotteniamo le due soluzioni già trovate.

4 Caso Generale Omogeneo.

In questo paragrafo trattiamo il caso di una equazione del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = 0.$$

L' osservazione a pag. 2 della Nota EquazioniDifferenzialiI ci permette di usare metodi di algebra lineare. Se V è uno spazio vettoriale, L una applicazione lineare di V in se e p un polinomio nella variabile T,$p(T) = \sum a_i T^i$, con $p(L)$ intendiamo l'applicazione lineare $\sum a_i L^i$, ove con L^i si intende la iterazione dell'applicazione L i volte: $L^i = L \circ L \ldots \circ L$[2]. Nel seguito applicheremo questa osservazione al caso in cui V è lo spazio delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con tutte le derivate continue e L l'applicazione lineare di derivazione $D : f \to \frac{df}{dx}$. Ad esempio partendo dal polinomio $3T^2 + 2$ possiamo associargli l'operatore differenziale tra V e V dato da $3D^2 + 2Id$, l'operatore cioè che ad ogni funzione $f \in V$ associa la funzione $3\frac{d^2}{dx^2}f + 2f$.

4.1 Un caso particolare.

Iniziamo con l'operatore $(D - aI)^m f$. Per caratterizzarne il nucleo osserviamo che

$$(D - aI)^m f = e^{at} D^m (e^{-at} f)$$

cosa che si dimostra molto facilmente per induzione.
Quindi $V_a = \ker(D - aI)^m = \{f | (D - aI)^m f = 0\} = \{f | e^{at} D^m (e^{-at} f) = 0\} = \{f | D^m (e^{-at} f) = 0\}$. Ciò significa che la funzione $e^{-at} f$ è un polinomio di grado minore di m, quindi V_a è lo spazio generato dalle funzioni

$$e^{at}, te^{at}, \ldots, t^{m-1} e^{at}.$$

Resta da provare che queste funzioni sono linearmente indipendenti ma questa è una facile verifica.

4.2 Caso generale.

Per trattare il caso di un operatore associato a un polinomio generale $P(T) \in \mathbb{R}[T]$ possiamo ricorrere alla usuale scomposizione del polinomio in fattori

$$P(T) = (T - a_1)^{m_1} \cdots (T - a_h)^{m_h}$$

ove come al solito le a_i sono le radici (complesse) del polinomio e m_i le loro molteplicità.[3]
Nella sezione precedente abbiamo descritto gli spazi V_{a_i}: ora vogliamo descrivere lo spazio $V = \ker P(D)$.
Osserviamo preliminarmente che benché il prodotto di due operatori lineari non sia commutativo ($AB \neq BA$) tuttavia risulta

[2] $L^0 = Id$

[3] Il lettore in possesso delle opportune nozioni di algebra lineare riconoscerà il parallelismo tra il procedimento espsoto e la prova del teorema di Jordan.

Proposizione 4.1 *Con le notazioni precedenti si ha*

$$p(A)q(A) = q(A)p(A)$$

Essendo p e q polinomi, basta osservare che $Ap(A) = p(A)A$

Teorema 4.2

$$V = \oplus V_{a_i}$$

Per provare questo risultato abbiamo bisogno di una relazione nota come identità di Bezout e per la cui prova, una semplice conseguenza dell'algoritmo che permette di calcolare il Massimo Comun Divisore tra due polinomi, rimandiamo all'appendice a questa Nota.

Teorema 4.3 *Siano p e q due polinomi coprimi in $\mathbb{R}[T]$, cioè MCD $(p, q) = c$ con $c \in \mathbb{R} \setminus 0$. Allora esistono due polinomi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[T]$ tali che $\alpha p + \beta q = 1$*

Questo risultato permette di dimostrare il teorema **??** nel caso di un polinomio con due sole radici. Lasciamo al lettore il caso generale, facendo un minimo attenzione alla definizione di somma diretta di piu spazi vettoriali.
Il teorema di Bezout ci dice che se $p_1 = (T - a_1)^{m_1}$ e $p_2 = (T - a_2)^{m_2}$ e $p = p_1p_2$ poiché $(p_1, p_2) = 1$, risulta immediatamente $V_p = V_{p_1} \oplus V_{p_2}$. Infatti da $\alpha p_1 + \beta p_2 = 1$ si ha, detti $f_1 = \alpha(D)p_1(D)(f)$ e $f_2 = \beta(D)p_2(D)(f)$ che $f = f_1 + f_2$ e $f_1 \in V_2, f_2 \in V_1$
Resta da dimostrare che $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Ma ancora l'identità di Bezout applicata ad un vettore $w \in V_1 \cap V_2$ ci dice che $w = 0$.
Lasciamo al lettore la cura di mettere a posto i dettagli del caso generale.

5 Ricerca di una soluzione particolare.

5.1 Metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Riprendiamo in questo paragrafo il procedimento per la ricerca di una soluzione particolare già visto nel caso delle equazioni del primo ordine, detto *metodo della variazione delle costanti arbitrarie.*
Punto di partenza è dunque una equazione del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t) \quad (**)$$

di cui si conoscono n integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dell'equazione omogenea associata, cioè per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$y_i^{(n)} + a_{n-1}y_i^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_i = 0.$$

Sappiamo che ogni soluzione y dell'equazione omogenea è combinazione lineare a coefficienti costanti c_i delle funzioni y_i, $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$.
Come abbiamo già fatto per le equazioni del primo ordine, cerchiamo se esiste una soluzione particolare della (**) ottenuta come combinazione lineare delle y_i a coefficienti funzioni $c_i(t)$ della stessa classe delle y_i.
Derivando la $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i$otteniamo

$$y' = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i + c_i y_i'.$$

Se imponiamo la condizione $\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i = 0$ otteniamo per la derivata seconda delle y_i una espressione

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i' + c_i y_i''.$$

Ripetiamo il procedimento: imponiamo che le c_i' verifichino $\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i' = 0$ e otteniamo per le derivate di ordine 3 delle y_i

$$y^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(2)} + c_i y_i^{(3)}.$$

Ripetiamo il procedimento fino ad ottenere

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}$$

con $\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{((n-2)} = 0$ e finalmente per la derivata n-esima

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n)} + c_i' y_i^{(n-1)}.$$

Sostituiamo ora i valori trovati per $y, y', \ldots, y^n$ nell'equazione di partenza. Otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + c_i y_i^{(n)} + a_{n-1} c_i y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n c_i y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + c_i (y_i^{(n)} + \ldots + a_{n-1} y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n y_i) = b(t)$$

Ricordando che ognuna delle y_i è soluzione della equazione omogenea, otteniamo che una condizione affinché $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ sia una soluzione dell'equazione non omogenea è

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = b(t).$$

Quindi se le $c_i'(t)$ verificano il sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 & + & c_2' y_2 & + & \dots & + & c_n' y_n & = & 0 \\ c_1' y_1' & + & c_2' y_2' & + & \dots & + & c_n' y_n' & = & 0 \\ & \dots & & \dots & & & & & \\ c_1' y_1^{(n-2)} & + & c_2' y_2^{(n-2)} & + & \dots & + & c_n' y_n^{(n-2)} & = & 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} & + & c_2' y_2^{(n-1)} & + & \dots & + & c_n' y_n^{(n-1)} & = & b(t) \end{cases}$$

le $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ sono una soluzione dell'equazione non omogenea.
Ai fini della risoluzione del sistema diventa interessante quindi lo studio del determinate $W(t)$ [4] della matrice dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & \dots & \dots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Questo determinante ha la proprietà che se si annulla in un punto dell'intervallo di definizione dell'equazione si annulla ovunque: questa è una conseguenza immediata del teorema della unicità della soluzione ma si può vedere anche in questo modo. Deriviamo $W(t)$: la derivata di un determinante D di ordine n, per la regola della derivazione di un prodotto, è la somma di n determinanti D_i ove il determinante D_i ha le righe uguali a quelle di D tranne la i esima che è derivata. Osserviamo inoltre che nel caso di W tutti questi determinanti hanno due righe uguali e pertanto sono nulli tranne l'ultimo che ha l'ultima riga composta dalle derivate n-esime delle y_i. Rimpiazzando queste ultime con le loro espressioni derivate dalla equazione di partenza, otteniamo di nuovo una somma di determinanti tutti nulli (hanno due linee uguali) ad eccezione di

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & \dots & \dots & \\ -a_1 y_1^{(n-1)} & -a_1 y_2^{(n-1)} & \dots & -a_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

[4] Questa matrice prende il nome di Wronskiano dal matematico polacco Josef Hoene-Wronski.

cioè il determinante W verifica l' equazione differenziale

$$W' = -a_1 W,$$

equazione che integrata fornisce la cosiddetta formula di Liouville $W = ce^{-\int a_1 dt}$. Da ciò otteniamo di nuovo che se $W = 0$ in un punto allora la costante c sarà nulla e quindi il determinante sarà nullo ovunque.

5.2 Alcuni casi speciali.

Quando la funzione è di qualche classe particolare i conti del paragrafo precedente possono semplificarsi in modo notevole. Questo accade quando la funzione $f(t)$ che è al termine noto, appartiene a una classe in un certo senso chiusa per derivazione.Vediamo di spiegare la cosa su degli esempi.
Distinguiamo innanzitutto se la $f(t)$ sia o meno soluzione dell'equazione omogenea
• $f(t)$ non è soluzione dell'equazione omogenea.
Esemplifichiamo il procedimento su un esempio concreto di $f(t)$ prendendo f del tipo $a \cos \omega t + b \sin \omega t$. Supponiamo cioè di avere una equazione del tipo

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

ove F è una funzione lineare nelle $y^{(i)}$ a coefficienti costanti. Le derivate di f saranno una combinazione lineare delle due funzioni $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$. Pertanto se cerchiamo una soluzione y del tipo $c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, la F calcolata per una tale y risulterà una combinazione lineare delle funzioni $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ e la relazione $F - f = 0$ si tradurrà in una relazione di dipendenza lineare per queste due funzioni. Il fatto che queste due funzioni siano linearmente indipendenti implicherà l'annullarsi dei coefficienti della combinazione lineare otenuta e quindi delle condizioni sulle costanti c_i.
Vediamo su un esempio.

$$F = y' - y = \sin 5t$$

Chiaramente la funzione $\sin 5t$ non è soluzione dell'equazione omogenea. Provando a cercare una soluzione del tipo $c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t$ otteniamo

$$-5c_1 \sin 5t + 5c_2 \cos 5t - c_1 \cos 5t - c_2 \sin 5t = \sin 5t$$

$$(-c_1 + 5c_2) \cos 5t + (-5c_1 - c_2 - 1) \sin 5t = 0$$

Ricordando quanto detto nella nota 1 si ha che l'indipendenza delle due funzioni $\cos 5t$ e $\sin 5t$ implica

$$\begin{cases} -c_1 + 5c_2 = 0 \\ -5c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi la funzione $y = -\frac{5}{26}\cos 5t - \frac{1}{26}\sin 5t$ è una soluzione particolare dell'equazione data.
Un tale procedimento si può ripetere in modo analogo quando la funzione $f(t)$ è un polinomio $p(t)$ o una funzione esponenziale ae^{bt} o prodotti di funzioni di questo tipo, cioè per funzioni di tipo $p(t)e^{bt}$, $(a\cos\omega t + b\sin\omega t)p(t)$, $(a\cos\omega t + b\sin\omega t)e^{bt}$. La cosa importante è che queste funzioni abbiano derivate dello stesso tipo, cioè che queste funzioni appartengano ad uno sottspazio (di dimensione finita) che l'operatore derivazione porta in se stesso, cioè un sottospazio invariante per l'operatore derivazione. La funzione con cui si fa il tentativo non è altro che l'elemento generico di tale sottospazio invariante. Pertanto nei vari casi la funzione modello per una soluzione particolare sarà della stessa forma della funzione f, cioè rispettivamente una combinazione lineare di seni e coseni di ωt, un polinomio dello stesso grado di f, un polinomio per un esponenziale con lo stesso esponente etc.
• $f(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea.
Se la funzione $f(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea questo procedimento presenta degli inconvenienti.
Enunciamo un risultato che è facile verificare in modo sperimentale, rinunciando in questa sede a una spiegazione approfondita del fenomeno, spigazione che forse esula dalla trattazione elementare fin qui data.
Nel caso che la f sia soluzione dell'equazione omogenea caratteristica, indichiamo con m la molteplicità della radice corrispondente nell'equazione caratteristica: cerchiamo una soluzione particolare dello stesso tipo di quelle cercate nei vari casi quando la f non era soluzione dell'omogenea, moltiplicata per un fattore t^m. Come abbiam detto lo studente può verificare sperimentalmente la validità dell'affermazione di cui rinunciamo in questa sede a dare una spiegazione teorica.

6 Appendice:Massimo Comun Divisore e Teorema di Bezout.

Richiamiamo qui brevemente l'algoritmo della divisione euclidea, alcune sue conseguenze come la ricerca del Massimo Comun Divisore insieme a qualche applicazione. Ricordiamo che dati due numeri naturali o interi a, b si definisce Massimo Comun Divisore di a e b e lo si indica con (a, b) un intero d tale che

- d divide sia a che b
- se d' divide sia a che b allora d' divide d.

Da questo segue immediatamente che se d e d' sono due MCD allora debbono dividersi vicendevolmente, cioè $d = hd'$ e $d' = kd$ per cui $d = hkd$ da cui $hk = 1$

che in $\mathbb{Z}$ significa $h = k = \pm 1$ e quindi $d = \pm d'$. Iniziamo richiamando il teorema di divisione di Euclide.

Teorema 6.1 *(Divisione con resto) Dati due numeri interi $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, esistono e sono unici due numeri interi q, r tali che $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$.*

Esistenza. Consideriamo l'insieme $A = \{a - nb, n \in \mathbb{Z}\}$. Poiché il sottoinsieme dei naturali $A \cap \mathbb{N}$ è non vuoto, ha un minimo r. Quindi $r = a - bq$ per qualche $q \in \mathbb{Z}$. Un tale r risulta senza dubbio ≥ 0. Supponiamo ora che $r \geq |b|$. Allora $a - |b| = bq + r - |b|$ da cui $a - |b| - qb = r - |b|$ e questo implica $a - b(q \pm 1) = r - |b|$ Avendo supposto $r \geq |b|$ abbiamo che $a - b(q \pm 1) \geq 0$. Ma essendo ≥ 0 ciò significa che $a - b(q \pm 1) \in A \cap \mathbb{N}$. Questo genera un assurdo perché $a - b(q \pm 1) = r - |b| < r$ e r era stato scelto come il minimo.
Unicità. Supponiamo che vi siano due coppie (q_i, r_i) che soddisfino le due condizioni. Abbiamo

$$a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$$

Se $r_1 \neq r_2$, sia $r_1 > r_2$ quindi $0 < r_1 - r_2 < |b|$
Sottraendo le due equazioni membro a membro otteniamo

$$b(q_2 - q_1) = r_1 - r_2$$

cioè

$$|b|(q_2 - q_1)| = |r_1 - r_2|.$$

Osserviamo che $q_2 - q_1 \neq 0$ implica $|b|(q_2 - q_1)| \geq |b|$
Ma $|r_1 - r_2| < |b|$. Contraddizione. Quindi $q_1 = q_2$ e di conseguenza $r_1 = r_2$.
La condizione $|r| < |b|$ è essenziale per l'unicità di q e r: senza tale condizione l'unicità viene sicuramente meno potendosi sempre scrivere $m = 0n + m$.
L'algoritmo di divisione di Euclide permette di costruire un algoritmo per la ricerca del MCD tra due numeri interi. Applichiamo infatti l'algoritmo di divisione euclidea a due interi m, n che per semplicità supporremo positivi.

$$m = nq_0 + r_0$$

Ripetiamo la procedura dividendo n per r_0

$$n = r_0 q_l + r_1$$

e così via

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

$$\ldots$$

fino ad ottenere resto 0

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1}$$
$$r_k = r_{k+1} q_{k+2} + 0$$

Allora $d = r_{k+1}$ è il MCD (m,n). Infatti risulta immediato verificare, risalendo le divisioni che d divide sia m che n e che se d' divide sia m che n allora seguendo in modo discendente sempre l'algoritmo di divisione euclidea risulta che d' divide d. Quindi d è ilMCD tra m e n.
Ripercorrendo in senso ascendente la successione di tali divisioni si vede che esistono due numeri interi (non necessariamente naturali) α e β tali che $d = r_{k+1} = \alpha m + \beta n$.
Tutto questo può essere ripetuto mutatis mutandis per il caso di due polinomi a coefficienti reali o complessi con la condizione che il resto della divisione sia di grado minore del divisore.
Abbiamo il concetto di divisibilità, e usando appunto il grado al posto del modulo possiamo ripetere la divisione euclidea e quindi l'algoritmo che ci da il MCD. Tra l'altro avremo il teorema di Bezout che enunciamo

Teorema 6.2 *Siano p, q due polinomi non nulli con $(p, q) = d$. Esistono polinomi α, β tali che $\alpha p + \beta q = d$*

Per provarlo basta ripercorrere a ritroso l'algoritmo di Euclide.
Abbiamo visto all'inizio della Nota una applicazione del Teorema di Bezout alla decomposizione di uno spazio vettoriale in sottospazi invarianti. Una altra applicazione interessante è alla decomposizione di Hermite di una funzione razionale.
Iniziamo con quello che viene detto sviluppo α adico di un polinomio. Dato un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono costanti $c_0, c_1, \dots, c_k$ tali che $p = c_0 + c_1(t-\alpha) + c_2(t-\alpha)^2 + c_3(t-\alpha)^3 + \ldots + c_h(t-\alpha)^h$. Basta scrivere il polinomio come $p((t-\alpha)+\alpha)$ ed esplicitare l'espressione. Osserviamo in più che tale scrittura è unica. Siano infatti

$$p = c_0 + c_1(t-\alpha) + c_2(t-\alpha)^2 + c_3(t-\alpha)^3 + \ldots + c_h(t-\alpha)^h$$
$$p = d_0 + d_1(t-\alpha) + d_2(t-\alpha)^2 + d_3(t-\alpha)^3 + \ldots + d_h(t-\alpha)^h$$

due tali scritture. Sottraendo membro a membro otteniamo

$$0 = c_0 - d_0 + (c_1 - d_1)(t-\alpha) + (c_2 - d_2)(t-\alpha)^2 + \ldots + (c_h - d_h)(t-\alpha)^h$$

e se r è il più piccolo intero per cui $c_r - d_r$ è non nullo otteniamo

$$0 = (t-\alpha)^r((c_r - d_r) + \cdots + (c_n - d_n)(t-\alpha)^{n-r})$$

Da cui $(c_r - d_r) + \cdots + (c_n - d_n)(t-\alpha)^{n-r} = 0$ da cui ponendo $t = \alpha$ otteniamo $c_r = d_r$.
Un altro modo è di considerare il fatto che i coefficienti c_i sono determinati a meno di un fattoriale dai valori delle derivate di p in α.

Corollario 6.3 *Sia $p \in \mathbb{R}[t]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed m un intero positivo. Allora esistono $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ e $g(t) \in \mathbb{R}[t]$tali che*

$$\frac{p(t)}{(t-\alpha)^m} = \frac{b_m}{(t-\alpha)^m} + \frac{b_{m-1}}{(t-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(t-\alpha)} + g(t)$$

Basta dividere ogni termine nella espressione precedente per $(t-\alpha)^m$. Si osservi anche che le costanti b_i sono univocamente determinate.
Consideriamo ora una funzione razionale f rapporto di due polinomi che penseremo senza fattori a comune, cioè $f = \dfrac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$.
Supponiamo che $q = q_1 q_2$ con $(q_1, q_2) = 1$ Dal teorema di Bezout otteniamo che esistono a_1, a_2 tali che $a_1 q_1 + a_2 q_2 = 1$ da cui

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1 q_2} = \frac{a_1 q_1 + a_2 q_2}{q_1 q_2} = \frac{a_1}{q_2} + \frac{a_1}{q_1}.$$

Il lettore avrà riconosciuto la decomposizione usata per calcolare l'integrale di finzioni del tipo $\dfrac{1}{(t-a)(t-b)}$. Con questi metodi otteniamo il seguente risultato

Teorema 6.4 *Sia $\dfrac{h(t)}{k(t)}$ una funzione razionale espressa come quoziente di due polinomi a coefficienti complessi. Sia*

$$k(t) = (t-\alpha_1)^{m_1} \cdots (t-\alpha_r)^{m_r}$$

la fattorizzazione di $k(t)$ tramite le sue radici distinte. Allora esistono in $\mathbb{C}[t]$ polinomi $h_1, \ldots, h_r(t)$ tali che

$$\frac{h(t)}{k(t)} = \frac{h_1(t)}{(t-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{h_2(t)}{(t-\alpha_2)^{m_2}} + \ldots + \frac{h_r(t)}{(t-\alpha_r)^{m_r}},$$

Dai ragionamenti fin qui fatti deduciamo che se abbiamo una funzione razionale del tipo $\dfrac{h}{k_1 k_2}$ con k_1 e k_2 primi tra loro, abbiamo una scomposizione $\dfrac{h}{k_1 k_2} = \dfrac{h\alpha_1}{k_2} + \dfrac{h\alpha_2}{k_1}$
Applicando questa osservazione ai polinomi $k_1(t) = (t-\alpha_1)^{m_1}$ e $k_2(t) = (t-\alpha_2)^{m_2} \cdots (t-\alpha_r)^{m_r}$ otteniamo

$$\frac{h(t)}{k(t)} = \frac{h_1}{(t-\alpha_1)^{m_1}} + R_1(t)$$

dove R_1 è una funzione razionale il cui denominatore è k_2. Iterando il procedimento arriviamo alla decomposizione voluta.
Abbiamo così ritrovato la decomposizione di Hermite usata per il calcolo di integrali di funzioni razionali.