November 24, 2014

CARATTERIZZAZIONE DIFFERENZIALE DELLE FUNZIONI ESPONENZIALE E LOGARITMO

Nella dispensa [Reali] e poi [C-INTERVALLI] abbiamo giustificato come la funzione $\exp(x) = e^x$ definita su tutto $\mathbb{R}$ sia ottenuta per estensione continua della funzione esponenziale definita in modo elementare su $\mathbb{Q}$ e che è l'unica funzione *continua* a valori in $\mathbb{R}^+$ che verifica le seguenti *proprietà funzionali*:

- $\exp(1) = e$
- Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

La funzione $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è stata definita come la funzione inversa di exp, e quindi è l'unica funzione continua che verifica le *proprietà funzionali*:

- $\log(e) = 1$
- Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Abbiamo poi calcolato le rispettive funzioni derivate da cui risulta che exp verifica le seguenti *proprietà differenziali*:

- $\exp(0) = 1$
- $(\exp)'(x) = \exp(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

mentre log verifica le *proprietà differenziali*:

- $\log(1) = 0$
- $(\log)'(x) = \dfrac{1}{x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

Vogliamo qui dimostrare che queste proprietà differenziali caratterizzano completamente le funzioni exp e log rispettivamente. Sia allora $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ derivabile tale che

- $g(1) = 0$
- $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

Vogliamo concludere che $g = \log$. Analizziamo le proprietà di g, utilizzando gli strumenti del calcolo differenziale:

(1) Poiché $g'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, allora la funzione g è strettamente crescente.

(2) Mostriamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$, è verificata la relazione fondamentale $g(xy) = g(x) + g(y)$. Infatti, pensiamo y fisso e consideriamo la funzione $h(x) = g(yx)$. Allora $h'(x) = g'(x)$. Ne segue che esiste una costante c tale che per ogni $x > 0$, $h(x) = g(x) + c$. Sostituendo $x = 1$, si ottiene $h(1) = g(y) = c$. Dunque abbiamo mostrato proprio che $g(yx) = g(x) + g(y)$. Ne segue in particolare che per ogni $a > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $g(a^n) = ng(a)$.

(3) Poichè g è crescente, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \sup \mathrm{Im}(g)$. Poiché $2 > 1$, $g(2) > 0$, dunque $g(2^n) = ng(2) \to +\infty$. Dunque la funzione g non è limitata superiormente e dunque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

(4) Poichè $g(x) = -g(\dfrac{1}{x})$, ne segue che $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$.

(5) Ne segue che $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è bigettiva, dunque esiste un unico $a \in \mathbb{R}^+$ tale che $g(a) = 1$

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la funzione inversa di g. allora f è derivabile e dunque $f'(x = g(y)) = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{1/y} = y = f(x)$. D'altra parte f è continua e verifica le proprietà funzionali:

   - $f(1) = a$
   - Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.

   Dunque, per quanto visto nelle dispense [REALI] e [C-INTERVALLI], $f(x) = a^x = e^{\log(a)x}$ e dunque $f'(x) = \log(a)f(x)$. Necessariamente allora $\log(a) = 1$ ed dunque $a = e$. Riassumendo abbiamo dimostrato che se g verifica le stesse proprietà differenziali di log, allora

$g = \log$. Ragionando in modo simile partendo da una funzione f che verifica le stesse proprietà differenziali di exp, si può concludere che $f = \exp$.

Si noti che anche senza conoscere già la funzione log, quando avremo a disposizione il *teorema fondamentale del calcolo integrale* sapremo che una funzione g che verifica quelle proprietà differenziali esiste, basta considerare la funzione integrale:

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \ .$$

Potremmo allora prendere $e' := g(1)$ come nuova definizione di un numero di Nepero e ridefinire $\log = g$, $\exp = g^{-1}$. Per chiudere il cerchio, basterebbe ora dimostrare che $e' = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.