December 10, 2014

PRIMITIVE ELEMENTARI

1. Introduzione

Abbiamo visto in [DERIVATE] che la derivata di una funzione derivabile elementare è ancora derivabile ed elementare. Supponiamo ora che $f : I \to \mathbb{R}$ sia una funzione derivabile (quindi continua) elementare definita sull'intervallo aperto I. Grazie al *Teorema fondamentale del calcolo integrale* (vedi [INTEGRAZIONE]) sappiamo che f ammette funzioni primitive. E' naturale allora porsi la domanda se ammette primitive elementari (poiché due primitive differiscono per una costante se una è elementare lo sono tutte). Vedremo che per certe classi di funzioni elementari la risposta è positiva e possiamo ricavare formule esplicite per le rispettive primitive. In generale però la risposta è negativa.

2. Miscellanea

Cominciamo indicando in modo sparso alcuni esempi di funzioni elementari con primitive elementari, ricavate usando soprattutto le regole di integrazioni per parti o per sostituzione/cambio di variabile.

(1) Risalendo la "gerarchia" delle funzioni elementari (vedi [MODELLI]) la prima classe che troviamo è quella delle funzioni polinomiali. Se
$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$
una primitiva è
$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} a_j x^{j+1}$$
dunque è un altro polinomio.

(2) Per ogni $(k, m) \in \mathbb{N}^2$, $k \geq 1$, poniamo $I_{k,m}(x) = \int x^m e^{kx} dx$. Mostriamo un modo induttivo di calcolare questo integrale indefinito. Per $m = 0$, $I_{k,0} = \frac{1}{k} e^{kx} + \mathbb{R}$.
$$(x^{m+1} e^{kx})' = (m + 1)x^m e^{kx} + kx^{m+1} e^{kx}$$
da cui, integrando per parti e usando la linearità dell'integrale, ricaviamo:
$$I_{k,m+1} = (1/k)(x^{m+1} e^{kx} - (m + 1)I_{k,m}) \ .$$
Usando la linearità dell'integrale, il risultato si estende ad ogni integrale della forma $\int p(x, e^x)dx$, dove $p(X_1, X_2)$ è un polinomio in due indeterminate.

(3) Poniamo $I_m(x) = \int x^m \sin(x)dx$, $J_m(x) = \int x^m \cos(x)dx$. Anche in questo caso otteniamo una definizione per induzione, verificando così che sono funzioni elementari. Infatti per $m = 0$ l'integrazione è immediata in entrambi i casi. Inoltre abbiamo:
$$(x^{m+1} \sin(x))' = (m + 1)x^m \sin(x) + x^{m+1} \cos(x)$$
$$(x^{m+1} \cos(x))' = (m + 1)x^m \cos(x) - x^{m+1} \sin(x)$$
da cui, integrando per parti e usando la linearità dell'integrale, otteniamo:
$$J_{m+1} = x^{m+1} \sin(x) - (m + 1)I_m$$
$$I_{m+1} = -x^{m+1} \cos(x) + (m + 1)J_m \ .$$
Usando la linearità dell'integrale, il risultato si estende ad ogni integrale della forma $\int p(x) \sin(x)dx$ o $\int p(x) \cos(x)dx$ dove $p(x)$ è polinomiale.

(4) Poniamo $f(x) = e^x \cos(x)$. Applicando due volte l'integrazione per parti

$$\int f(x)dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int f(x)dx$$

da cui

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x)) \ .$$

In modo analogo si possono trattare le funzioni della forma

$$f(x) = e^{ax}\cos(bx), \ \ f(x) = e^{ax}\sin(bx) \ .$$

(5) Integrali del tipo

$$I_s = \int \frac{1}{(1+t^2)^s}dt \ .$$

Usando ripetutamente l'integrazione per parti, si calcolano per induzione come segue:

$$I_1 = \arctan(t) + \mathbb{R}$$

$$I_s = \frac{t}{2(s-1)(1+t^2)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2}I_{s-1} \ .$$

Ne segue che ogni primitiva è una funzione elementare.

(6) **Polinomi trigonometrici.** Richiamiamo alcuni fatti già visti in [COMPLESSI]. Nel trattare le funzioni trigonometriche è spesso utile fare uso della *funzione di Eulero* definita su $\mathbb{R}$ e a valori complessi:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

che soddisfa l'identità fondamentale

$$e^{ix}e^{iy} = (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) = e^{i(x+y)}$$

che incorpora le formule di addizione di sin e cos e giustifica anche la notazione. Possiamo anche estendere la funzione esponenziale da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ponendo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

che verifica anch'essa l'identità fondamentale nel campo dei numeri complessi:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \ .$$

Inoltre le stesse funzioni cos e sin si possono esprimere in quanto rispettivamente la *parte reale* e la parte *immaginaria* della funzione di Eulero

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ .$$

Praticamente tutte le formule della trigonometria elementare si possono riottenere manipolando algebricamente queste formule di base. Vediamo per esempio le *formule di Prostaferesi*:

$$\sin(A)\sin(B) = \left(\frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iB} - e^{-iB}}{2i}\right) =$$

$$(1/2)\left(\frac{e^{i(A-B)} + e^{-i(A-B)}}{2} - \frac{e^{i(A+B)} + e^{-i(A+B)}}{2}\right) =$$

$$\frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

e analogamente si ottiene:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A-B) + \sin(A+B)}{2}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{2} \ .$$

Sia ora $p(X_1, X_2)$ un polinomio in due indeterminate. Vogliamo trattare gli integrali indefiniti della forma

$$\int p(\cos(ax+b), \sin(cx+d))dx$$

dove $a, c \neq 0$ e mostrare in particolare che sono elementari. Usando la linearità dell'integrale ci riduciamo a studiare il caso in cui $p(X_1, X_2)$ è un monomio, cioè integrali della forma

$$\int k \cos^s(ax+b) \sin^r(cx+d) dx \ .$$

Affermiamo che il prodotto

$$\cos^s(ax+b) \sin^r(cx+d)$$

si può scrivere come una somma di termini della forma

$$K \cos(Ax+B), \ K \sin(Cx+D) \ .$$

Questo può essere mostrato per induzione su $m = s + r \geq 1$. Se $m = 1$ il fatto è evidente. Se $s \geq r$, scriviamo

$$\cos^s(ax+b) \sin^r(cx+d) = \cos(ax+b)(\cos^{s-1}(ax+b) \sin^r(cx+d))$$

se $r \geq s$, scriviamo

$$\cos^s(ax+b) \sin^r(cx+d) = \sin(cx+d)(\cos^s(ax+b) \sin^{r-1}(cx+d))$$

in entrambi i casi il secondo fattore ha la somma degli esponenti uguale a $m - 1$, quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva ottenendo una somma di termini di uno dei seguenti tipi

$$K \cos(ax+b) \cos(Ax+B), \ K \cos(ax+b) \sin(Cx+D), \ K \sin(cx+d) \sin(Cx+D) \ .$$

Resta da dimostrare che la tesi vale per questi ultimi integrandi, cioè quando $m = 2$. Ma questo segue immediatamente dalle formule di Prostaferesi.

Un modo equivalente di ottenere lo stesso risultato (per i monomi) è quello di sviluppare completamente, usando in particolare la formula di Newton per le potenze di un binomio, la seguente espressione in termini della funzione di Eulero:

$$(\frac{e^{i(ax+b)} + e^{-i(ax+b}}{2})^s (\frac{e^{i(cx+d)} - e^{-i(cx+d)}}{2i})^r \ .$$

Siamo così ridotti agli integrali della forma

$$\int \cos(ax+b) dx, \ \int \sin(ax+b) dx$$

al variare dei parametri $a, b, \ a \neq 0$. Il cambio di variabile $t = ax + b, \ \ x = \dfrac{t-b}{a}$ ci riduce infine a

$$\int (1/a) \cos(t) dt, \ \int (1/a) \sin(t) dt$$

che sono immediati.

Gli integrali

$$\int \sin^r(x) \cos^s(x) dx$$

si trattano anche con opportuni cambiamenti di variabile. Vediamo per esempio due casi:

(1) $r = 2m + 1$ dispari e $s = 2n$ sia pari. Allora riscriviamo l'integrale nella forma

$$\int (1 - \cos^2)^m \cos^{2n} \sin(x) dx = - \int (1 - t^2)^m t^{2n} dt$$

via la sostituzione $t = \cos(x)$. Si procede in modo analogo se invece r è pari e s è dispari.

(2) $r = 2m + 1, \ s = 2n + 1$ entrambi dispari. Allora

$$\int \sin^{2m}(x) \cos^{2n} \sin(x) \cos(x) dx = (-1/4) \int (\frac{1-t}{2})^m (\frac{1+t}{2})^n dt$$

via la sostituzione $t = \cos(2x)$ (si usano casi particolari delle formule di Prostaferesi).

3. Funzioni razionali

Risalendo ancora la "gerarchia" delle funzioni elementari dopo le polinomiali troviamo le funzioni razionali. E' meno immediato, ma anche le funzioni razionali ammettono primitive elementari. Descriviamo la procedura che conduce al risultato (nel fare questo mostreremo anche numerosi esempi espliciti di primitive elementari) :

(1) Partiamo da una funzione razionale $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$. Questa è definita sull'aperto $D = \{D(x) \neq 0\}$ che è l'unione di un numero finito di intervalli aperti. Supponiamo di avere selezionato un sottointervallo (sia I) di uno di questi intervalli e conveniamo di considerare la restrizione di f ad I. Grazie alla "divisione con il resto" per $D(x)$, possiamo riscrivere f nella forma
$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$
dove $Q(x)$ e $R(x)$ sono polinomi e il grado del resto $R(x)$ è strettamente minore di quello di $D(x)$. Per la linearità dell'integrale indefinito, e poiché sappiamo integrare facilmente il polinomio $Q(x)$, siamo ridotti a trovare una primitiva della funzione razionale $g(x) = \dfrac{R(x)}{D(x)}$.

(2) Consideriamo due casi di base, cioè quando il grado di $D(x)$ è uguale a 1 o a 2. Nel primo caso la funzione è della forma
$$g(x) = \frac{a}{x - \alpha}$$
dove $a, \alpha \in \mathbb{R}$. Una primitiva immediata è allora $G(x) = a \log(|x - \alpha|)$ che è elementare. Se il gardo è 2, allora
$$g(x) = \frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$
per certe costanti a, b, p, q. Considerato $\Delta = p^2 - 4q$, ci sono tre possibilità:
- $\Delta > 0$, allora $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$ $\alpha \neq \beta$. Affermiamo che allora $g(x)$ può essere riscritta nella forma
$$g(x) = \frac{a_1}{x - \alpha} + \frac{a_2}{x - \beta}$$
dove le costanti a_1 e a_2 sono le uniche che soddisfano le identità
$$a_1 + a_2 = a, \quad \alpha a_1 + \beta a_2 = -b$$
si ottengono cioè come le uniche soluzioni di questo sistema lineare. Per la linearità dell'integrale indefinito, l'integrale di g è allora la somma di due integrali del tipo trattato nel caso precedente.
- Se $\Delta = 0$, allora $x^2 + px + q = (x - \alpha)^2$. In questo caso si può riscrivere
$$g(x) = \frac{a_1}{x - \alpha} + \frac{a_2}{(x - \alpha)^2}$$
dove $a_1 = a, \quad a_2 = a\alpha + b$. A questo punto una primitiva immediata di g è
$$G(x) = a \log(|x - \alpha|) - \frac{a\alpha + b}{x - \alpha}$$
che è elementare.
- Se $\Delta < 0$, allora $x^2 + px + q$ non ha radici reali ed è sempre positivo. In questo caso il trattamento è un po' più laborioso. Ci limitiamo ad esibire una primitiva di g anche in questo caso (il lettore può verificare che è una primitiva facendone la derivata).
$$G(x) = \frac{a}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{2b - ap}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$
che è elementare.

(3) Nel caso generale, grazie al teorema fondamentale dell'algebra e alle proprietà dei polinomi reali, il denominatore $D(x) = p_0 + p_1 x + \dots p_{n-1} x^{n-1} + x^n$ può essere decomposto nel prodotto di fattori di due tipi

$$(x-\alpha)^m, \ (x^2+px+q)^k$$

dove $m, k \leq n$ e il polinomio di secondo grado ha discriminante $\Delta = p^2 - 4q < 0$, dunque $x^2 + px + q > 0$ per ogni x . Si riscrive allora $g(x)$ come somma di certe funzioni razionali più semplici. Ogni fattore del primo genere contribuisce con un pacchetto di addendi del seguente tipo:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{(x-\alpha)^j}$$

mentre ogni fattore del secondo genere con un pacchetto del tipo

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{m_s x + n_s}{(x^2+px+q)^s} \ .$$

L'insieme delle costanti a_j, m_s, n_s, per tutti i fattori di $D(x)$, si determinano in modo univoco come soluzioni di un opportuno sistema di equazioni lineari che può a sua volta essere determinato esplicitamente.

(4) Ancora grazie alla linearità dell'integrale, siamo così ridotti a calcolare una primitiva di due tipi speciali di funzioni razionali:

$$g(x) = \frac{a_j}{(x-\alpha)^j}, \ g(x) = \frac{m_s x + n_s}{(x^2+px+q)^s} \ .$$

Per quelli del primo genere, il caso $j = 1$ è già stato trattato. Se $j > 1$ una primitiva immediata è

$$G(x) = \frac{a_j}{1-j} \frac{1}{(x-\alpha)^{j-1}} \ .$$

Per quelli del secondo genere, prima riscriviamo la funzione nella forma

$$g(x) = A \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s} + B \frac{1}{(x^2+px+q)^s}$$

dove le costanti A e B sono facilmente calcolabili.

(5) Ancora per linearità siamo ridotti a determinare una primitiva di ulteriori due tipi speciali di funzioni razionali

$$g(x) = \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}, \ g(x) = \frac{1}{(x^2+px+q)^s}$$

per quelle del primo genere, se $s = 1$ è un caso già trattato, se $s > 1$, una primitiva immediata è

$$\frac{1}{1-s} \frac{1}{(x^2+px+q)^{s-1}} \ .$$

(6) Per quelle del secondo genere, mediante la sostituzione

$$t = \frac{2x-p}{\sqrt{-\Delta}}$$

ci riduciamo al calcolo di integrali del tipo

$$I_s = \int \frac{1}{(1+t^2)^s} dt$$

che sono già stati trattati in precedenza.

Riassumendo possiamo concludere che ogni primitiva di una funzione razionale è elementare derivabile. Più precisamente

Le primitive di una funzione razionale sono combinazioni lineari di funzioni razionali e di funzioni del tipo $\log(ax^2 + bx + c)$ *o* $\arctan(ax + b)$.

Osserviamo infine che il calcolo di una tale primitiva può essere portato in fondo esplicitamente solo a condizione (niente affatto scontata) di conoscere esplicitamente la decomposizione in fattori irriducibili del denominatore $D(x)$.

4. Esempi di razionalizzazione

Per certe classi di funzioni elementari, opportune manipolazioni consentono di ricondurre il calcolo di una primitiva al calcolo di una primitiva di una funzione razionale, che sappiamo trattare. Senza alcuna pretesa di essere esaustivi, indichiamo alcuni esempi.

(1) Consideriamo una funzione della forma $f(x) = R(y(x))$ dove $R(y)$ è una funzione razionale nella variabile y. Poniamo $t = y(x)$ e supponiamo che $y' = S(t)$ dove S è un'altra funzione razionale. Allora
$$\int f(x)dx = \int \frac{R(t)}{S(t)}dt$$
e chiaramente l'ultima funzione è razionale. Ad esempio
$$\int R(e^x)dx = \int \frac{R(t)}{t}dt$$
$$\int R(\tan(x)) = \int \frac{R(t)}{1+t^2}dt\ .$$

(2) **(Funzioni razionali trigonometriche)** Consideriamo una funzione della forma $f(x) = R(\sin(x), \cos(x))$. Facendo la sostituzione (sugli intervalli della forma $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$):
$$t = \tan(x/2)$$
da cui
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
si ottiene
$$\int f(x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt\ .$$
Ad esempio
$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{dt}{t} = \log(|t|) + \mathbb{R} = \log(|\tan(x/2)|) + \mathbb{R}\ .$$
In certi casi altri cambiamenti di variabile razionalizzanti possono risultare praticamente più convenienti. Per esempio
(i) Se $R(\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), -\cos(x))$ allora si può usare $t = \sin(x)$.
(ii) Se $R(\sin(x), \cos(x)) = -R(-\sin(x), \cos(x))$ allora si può usare $t = \cos(x)$.
(i) Se $R(\sin(x), \cos(x)) = R(-\sin(x), -\cos(x))$ allora si può usare $t = \tan(x)$.

(3) Consideriamo una funzione della forma $f(x) = R(\sin(x), \cos^2(x))\cos(x)$. Facendo la sostituzione $t = \sin(x)$ ci riduciamo a
$$\int R(t, 1-t^2)dt\ .$$

4.1. **Integrali Abeliani.** Si tratta di integrali della forma
$$\int R(x, y(x))dx$$
al variare di x in un intervallo aperto I, dove:

(a) $R(x, y)$ è una funzione razionale nelle due variabili x, y (cioè il rapporto di due funzioni polinomiali nelle due variabili);
(b) Esiste un polinomio in due variabili $P(X, Y)$ tale che
$$P(x, y(x)) = 0\ .$$

Il luogo di zeri di $P(X,Y)$, $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ P(x,y) = 0\}$, è una curva in $\mathbb{R}^2$, e $x \to (x, y(x))$ è una parametrizzazione di un arco di Γ (vedi anche [ARCHI]). Un tale integrale si razionalizza *se* esistono due funzioni razionali di una terza variabile t, definite su un intervallo aperto J:

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t)$$

tali che:

(i) ϕ parametrizza I;
(ii) $P(\phi(t), \psi(t)) = P(\phi(t), y(\phi(t)) = 0$.

Infatti in tal caso, usando la regola di integrazione per sostituzione abbiamo che

$$\int R(x, y(x))dx = \int R(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)dt\ .$$

Vediamo alcuni esempi:
• **(Γ conica)** Supponiamo che il polinomio $P(X,Y)$ sia di grado uguale a 2. La curva Γ è una *conica* e può essere un' *ellisse*, una *iperbole* o una *parabola.* In questo caso è sempre possibile trovare funzioni razionalizzanti (ϕ, ψ) del tipo voluto. Il metodo *geometrico* per determinarle è il seguente. Supponiamo per semplicità che $I \neq \mathbb{R}$. Preso x_0 che non appartiene a I, sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$. la generica retta che passa per il punto (x_0, y_0) ha equazione

$$y = tx + (y_0 - tx_0)$$

dove t è un parametro che varia in $\mathbb{R}$. Una tale retta interseca Γ nel punto (x_0, y_0) e in un solo altro punto $(x(t), y(t))$ di coordinate che sono funzioni razionali di t. Si determina infine un intervallo aperto J opportuno in modo che le restrizioni a J forniscano le funzioni $(\phi(t), \psi(t))$ cercate. Vediamo come funziona in un esempio concreto:

$$\int R(x, \sqrt{(x-1)(x-2)})dx$$

$I = \{x > 2\}$. $P(X,Y) = Y^2 - (X-1)(X-2)$. Prendiamo allora $(x_0, y_0) = (1, 0)$. La retta generica per $(1,0)$ ha equazione

$$y = tx - t$$

sostituendo in $P(X,Y)$ otteniamo

$$(x-1)(t^2(x-1) - (x-2)) = 0$$

da cui

$$x = \frac{t^2-2}{t^2-1},\ y = \frac{-t}{t^2-1}$$

ed infine $J = \{0 < t < 1\}$.
• Non è necessario che $P(X,Y)$ sia di grado 2, affinché esistano (ϕ, ψ) razionalizzanti. Si consideri ad esempio

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

assumendo che $ad - bc \neq 0$. Il polinomio $P(X,Y) = Y^n(cx+d) - (ax+d)$ ha grado n. Allora le restrizioni di

$$x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a},\ y = t$$

ad ogni sotto-intervallo J di $\{-ct^n + a \neq 0\}$ forniscono valide (ϕ, ψ).
• Gli integrali Abeliani della forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx,\ a \neq 0$$

quindi basati su una conica possono essere razionalizzati in modo sistematico come segue:

(1) Se $a > 0$ si pone

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$$

da cui elevando al quadrato e risolvendo rispetto a x si ottiene

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$$

e quindi si razionalizza l'integrale.

(2) Se $a < 0$, necessariamente $\Delta > 0$, il polinomio si fattorizza

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

ed x varia nell'intervallo $[\alpha, \beta]$. Si può allora riscrivere

$$ax^2 + bx + c = \sqrt{-a}(x - \alpha)\sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$$

per cui ci riconduciamo ad un integrale del tipo visto prima, che si razionalizza mediante la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}\ .$$

4.2. **Integrali ellittici.** Abbiamo affermato all'inizio che non tutte le funzioni elementari hanno primitive elementari. Anche se *non* giustificheremo l'affermazione, indichiamo una classe di funzioni elementari derivabili che in generale *non hanno primitive elementari*. Si tratta degli integrali Abeliani della forma:

$$\int R(x, \sqrt{q(x)})dx$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado uguale a 3 o 4. Dunque $P = Y^2 - q(X)$ ha grado 3 o 4 e questo significa in particolare che in generale questi integrali *non* possono essere razionalizzati. Si chiamano *integrali ellittici* perché emersi inizialmente nello studio della lunghezza degli archi di una ellisse (vedi [ARCHI]) e sono stati ampiamente studiati, a partire almeno da Eulero. Questo studio necessita però dei metodi che vanno ben oltre gli scopi di questo corso.