November 12, 2014

SULLE FUNZIONI CONTINUE DEFINITE SU UN INTERVALLO

La definizione astratta di *intervallo* di $\mathbb{R}$ dice che si tratta di un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$, che verifica la seguente proprietà:

Per ogni coppia di punti $x, y \in I$ *tale che* $x \leq y$, *si ha che* $[x, y] = \{z \in \mathbb{R}; x \leq z \leq y\} \subset I$.

Si può dimostrare che I è un intervallo se e solo se I ha una delle seguenti forme:

- $I = [x, y]$ per qualche coppia $x \leq y$ di elementi di $\mathbb{R}$. In questo caso diciamo che I è un *intervallo chiuso e limitato.*
- $I = [x, +\infty)$ per qualche $x \in \mathbb{R}$.
- $I = (-\infty, y]$ per qualche $y \in \mathbb{R}$.
- $I = (a, b)$ dove $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$ (stipulando che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq x \leq +\infty$). A seconda dei casi $e_s = x, a, -\infty$, $e_d = y, b, +\infty$ vengono detti rispettivamente l'estremo sinistro e l' estremo destro dell'intervallo.

In pratica, quando parleremo di un intervallo I, intenderemo uno dei casi concreti sopra indicati. Un' altra caratterizzazione utile degli intervalli è data dalla seguente proposizione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Proposizione 0.1. *I è un intervallo di $\mathbb{R}$ se e solo se è l' unione di una successione crescente di intervalli chiusi e limitati, cioè esiste una successione di intervalli chiusi e limitati $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$, tali che $I_n \subset I$, $I_n \subset I_{n+1}$, $I = \cup_n I_n$.*

Osserviamo che se $x = y$, allora $[x, y] = \{x\}$ è un intervallo degenere ridotto ad un punto, ed ogni funzione definita su $\{x\}$ è costante e quindi continua. D'altra per ogni intervallo I non degenere e per ogni $a \in I$, a è un punto di accumulazione per I. Quindi sappiamo che:

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se, per ogni $a \in I$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

In questa nota vogliamo mettere in evidenza importanti *proprietà qualitative* (a volte vengono dette "topologiche") delle funzioni continue definite su un intervallo I. "Qualitativo" sta a significare che tipicamente, in opportune ipotesi, dimostreremo l' *esistenza* di punti di I che verificano certe proprietà, senza però avere indicazioni quantitative sulla loro effettiva localizzazione.

1. Compattezza per successioni

Cominciamo con una importante proprietà degli intervalli chiusi e limitati. Premettiamo una definizione.

Definizione 1.1. Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}$ si dice *compatto per successioni* se per ogni successione $a : \mathbb{N} \to K$, esistono una successione estratta a_{n_j} ed un elemento $b \in K$, tali che $a_{n_j} \to b$. A volte diremo semplicemente "compatto", omettendo di dire "per successioni".

Allora abbiamo:

Teorema 1.1. *Ogni intervallo chiuso e limitato $I = [\alpha, \beta]$ è compatto per successioni.*

Dim. Se $\alpha = \beta$, $I = \{\alpha\}$, ogni successione a valori in I è costante e quindi convergente ad α. Supponiamo che $\alpha < \beta$. Sia $a : \mathbb{N} \to [\alpha, \beta]$ una successione a valori nell'intervallo. Consideriamo il punto medio di I, $p = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Questo divide I in due sottointervalli chiusi e limitati che si intersecano in p. Possiamo senz'altro sceglierne uno, che denotiamo $I_1 = [\alpha_1, \beta_1] \subset I$, che verifica le seguenti proprietà:

(1) $\beta_1 - \alpha_1 = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$;
(2) Esiste un sottoinsieme infinito $A_1 \subset \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in A_1$, $a_n \in I_1$.

Procediamo adesso per induzione. Supponiamo di avere definito un intervallo $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$, $I_n \subset I_{n-1} \subset I$, tale che $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{\beta - \alpha}{2^n}$, ed esiste un sottoinsieme infinito $A_n \subset A_{n-1}$, tale che per ogni $m \in A_n$, $a_m \in I_n$. Prendendo il punto medio $p_n = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2}$ di I_n e applicando a (I_n, A_n) la stessa costruzione che ha prodotto (I_1, A_1) a partire da $(I, \mathbb{N})$, produciamo (I_{n+1}, A_{n+1}) che verificano le stesse proprietà. Quindi, per induzione concludiamo che tali (I_n, A_n) esistono per ogni $n \geq 1$. I seguenti fatti seguono direttamente dalla costruzione:

- La successione degli estremi sinistri α_n è non decrescente. La successione degli estremi destri β_n è non crescente. Per entrambe le successioni α è un minorante e β è un maggiorante. Dunque entrambe convergono in $I = [\alpha, \beta]$: $\alpha_n \to b' \in I$, $\beta_n \to b" \in I$.
- I due limiti coincidono: $b = b' = b"$. Infatti $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{\beta - \alpha}{2^n}$, da cui $\beta_n - \alpha_n \to b" - b' = 0$.

Possiamo infine costruire una sottosuccesione di a tale che $a_{n_j} \to b$. Poniamo a_{n_0} dove n_0 è il minimo elemento di A_1. Poi per induzione definiamo a_{n_j} dove n_j è il minimo elemento di $A_{j+1} \setminus \{n_0, \dots, n_{j-1}\}$ (che è non vuoto perché A_{j+1} è infinito). Per costruzione, $\alpha_{n_j} \leq a_{n_j} \leq \beta_{n_j}$, e per "confronto" si conclude appunto che anche $a_{n_j} \to b \in I$. Dunque I è compatto per successioni.

$\square$

Non è difficile dimostrare una specie di teorema inverso (lo lasciamo per esercizio).

Proposizione 1.2. *Se I è un intervallo compatto per successioni, allora I è chiuso e limitato, cioè della forma $I = [\alpha, \beta]$.*

2. Funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato

Teorema 2.1. (Teorema degli zeri) *Sia $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, un intervallo chiuso e limitato. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Allora esiste $a \in I$ tale che $f(a) = 0$.*

Dim. Per ipotesi $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ hanno segni opposti, dunque i due corrispondenti punti del grafico $G(f) \subset I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ stanno da parti opposte rispetto al segmento $I \times \{0\}$. L'idea geometrica intuitiva è che siccome la funzione f è continua, il grafico $G(f)$ è una curva che può essere disegnata senza staccare mai la matita dal foglio. Ma allora ci deve essere un punto di intersezione $(a, 0) \in G(f) \cap I \times \{0\}$, da cui $f(a) = 0$. Vediamo di formalizzare questa idea intuitiva. Intanto (considerando se necessario la funzione $-f$) non è restrittivo supporre che $f(\alpha) < 0$ e $f(\beta) > 0$. Poniamo $E = \{x \in I; f(x) < 0\}$. Chiaramente E è non vuoto e limitato superiormente. Poniamo $a = \sup E$. E' chiaro che $a \in I$. Affermiamo che $f(a) \leq 0$. Infatti se fosse $f(a) > 0$, per la continuità di f e la "permanenza" del segno esisterebbe un $\epsilon > 0$ tale che $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset I$ e per ogni $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, $f(x) > 0$. Per le proprietà del sup, $E \cap (a - \epsilon, a + \epsilon) \neq \emptyset$, dunque esistebbe y tale che $f(y) > 0$ e $f(y) < 0$ che è impossibile. Vogliamo dimostrare che $f(a) = 0$. Se invece fosse $f(a) < 0$, ancora per la continuità di f e la "permanenza del segno", ci sarebbe $\epsilon > 0$ tale che $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset I$ e per ogni $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, $f(x) < 0$. Ma allora $a + \epsilon/2 > a$ ed appatiene ad E e questo è contro il fatto che $a = \sup E$. $\square$

Teorema 2.2. (Teorema del punto fisso) *Sia $I = [\alpha, \beta]$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $f : I \to I$ una funzione continua. Allora f ha almeno un punto fisso, cioè esiste $a \in I$ tale che $f(a) = a$.*

Dim. Se $I = \{\alpha\}$ il teorema è banalmente vero. Supponiamo $\alpha < \beta$. Se $f(\alpha) = \alpha$ o $f(\beta) = \beta$, la tesi è verificata. Altrimenti si ha che necessariamente $f(\alpha) > \alpha$ e $f(\beta) < \beta$. Cio è i punti $(\alpha, f(\alpha))$ e $(\beta, f(\beta))$ def grafico $G(f) \subset I^2$ stanno da parti apposte rispetto alla diagonale $\Delta(I)$ del quadrato I^2. Adesso l'idea intuitiva è che il grafico debba necessariamente intersecare la diagonale. In effetti possiamo ricondurci al Teorema degli zeri. Poniamo infatti $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - f(x)$; g è continua e $g(\alpha)g(\beta) < 0$. Dunque esiste $a \in I$ tale che $g(a) = a - f(a) = 0$. $\square$

Per il seguente teorema è cruciale la compattezza degli intervalli chiusi e limitati.

Teorema 2.3. (Teorema del massimo e del minimo) *Sia $I = [\alpha, \beta]$ un intervallo chiuso e limitato. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ha almeno un punto di minimo e un punto di massimo, cioè esistono $a, b \in I$ tali che per ogni $x \in I$, $f(a) = A \leq f(x)$, $f(b) = B \geq f(x)$.*

Dim. Dimostriamo intanto che $f(I)$ è limitata. Per esempio dimostriamo che è limitata superiormente. Altrimenti esisterebbe una successione $a : \mathbb{N} \to I$, tale che $f(a_n) \to +\infty$. Per la compattezza di I possiamo estrarre da a una sottosuccessione a_{n_j} tale che $a_{n_j} \to b \in I$. Per la continuità di f avremmo $f(a_{n_j}) \to f(b) \neq +\infty$, che è assurdo. Analogamente si dimostra che è limitata inferiormente. Poniamo allora $A = \inf f(I) \in \mathbb{R}$, $B = \sup f(I) \in \mathbb{R}$ rispettivamente. Vogliamo dimostrare per esempio che esiste $b \in I$ tale che $f(b) = B$. Ragionando come prima (sostituendo B a $+\infty$), costruiamo una successione a_{n_j} a valori in I tale che $a_{n_j} \to b \in I$ e $f(a_{n_j}) \to f(b) = B$. Analogamente possiamo dimostrare che esiste $a \in I$ tale che $f(a) = A$. $\square$

Il Teorema precedente può essere riformulato nel modo seguente:

Sia $I = [\alpha, \beta]$ un intervallo chiuso e limitato. Per ogni funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$, esiste un intervallo chiuso e limitato $[A, B]$ tale che $f(I) \subset [A, B]$ (per cui possiamo scrivere $f : I \to [A, B]$) e $A, B \in f(I)$.

Il seguente teorema precisa che $f : I \to [A, B]$ è surgettiva.

Teorema 2.4. (Teorema dei valori intermedi) *Siano $I = [\alpha, \beta]$ un intervallo chiuso e limitato e $f : I \to [A, B]$ una funzione continua tale che $A, B \in f(I)$. Allora $f(I) = [A, B]$.*

Dim. Se $A = B$ la funzione è costante e la tesi è banalmente verificata. Supponiamo che $A < B$ e sia y un arbitrario valore intermedio $A < y < B$. La funzione $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - y$ è continua e verifica l'ipotesi del teorema degli zeri. Quindi esiste a in I tale che $g(a) = f(a) - y = 0$, cioè $y = f(a)$. Poiche' y è arbitrario, questo mostra proprio che $f(I) = [A, B]$. $\square$

Il seguente corollario è giusto una riformulazione espressiva e concisa di alcuni dei fatti appena dimostrati.

Corollario 2.1. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un arbitrario sottoinsieme D di $\mathbb{R}$. Allora f manda ogni intervallo compatto contenuto in D sopra un intervallo compatto di $\mathbb{R}$.*

3. Funzioni continue definite su un intervallo qualsiasi

I teoremi visti nel precedente paragrafo si applicano per ottenere risultati nel caso di intervalli qualsiasi.

Corollario 3.1. *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che esistano $\alpha, \beta \in I$ tali che $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Allora esiste $a \in I$ tale che $f(a) = 0$.*

Dim. Basta applicare il Teorema degli zeri alla restrizione di f all'intervallo $[\alpha, \beta] \subset I$. $\square$

L'ipotesi del corollario si realizza in molte circostanze. Per esempio, per la "permanenza del segno" questo succede se $\lim_{x \to e_s} f(x) = l_s \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to e_d} f(x) = l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l_s l_d < 0$. Come caso particolare, si può dimostrare in questo modo che ogni polinomio $p(X)$ a coefficienti reali di grado *dispari* ha una radice reale (metre se il grado è pari possono non esistere radici reali, come succede per il polinomio $p(X) = X^2 + 1$).

Corollario 3.2. *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora anche $f(I)$ è un intervallo.*

Dim. Realizziamo $I = \cup_n I_n$ come l' unione di una successione crescente di intervalli chiusi e limitati. Allora $f(I) = \cup_n f(I_n)$ è anch'essa l'unione di una successione crescente di intervalli chiusi e limitati, dunque è un intervallo. $\square$

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, una qualsiasi funzione crescente o decrescente. E' allora evidente che f è iniettiva. Nel caso di funzioni continue definite su un intervallo vale anche il viceversa ed inoltre la funzione inversa è continua.

Proposizione 3.3. *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Allora:*
(1) **(Monotonia delle funzioni iniettive)** *f è strettamente monotona, cioè è crescente o decrescente.*
(2) **(Continuità dell'inversa)** *La funzione inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua.*

Dim. (1) Supponiamo per assurdo che esistano tre punti in I, $a < b < c$ tali che $f(a) < f(b)$, $f(b) > f(c)$, oppure $f(a) > f(b)$, $f(b) < f(c)$. Ragioniamo nel primo caso (l'altro sarà analogo). Sia y tale che $f(a) < y < f(b)$ e $y > f(c)$. Applicando il Teorema dei valori intermedi alla restrizione di f su l'intervallo $[a, b]$ e sull'intervallo $[b, c]$ rispettivamente, vediamo che esistono $t \in (a, b)$ e $t' \in (b, c)$ tali che $f(t) = f(t') = y$ e questo è contro l'ipotesi che f sia iniettiva.
(2) Sappiamo già che $J := f(I)$ è un intervallo. Se f è crescente (risp. decrescente) anche f^{-1} è crescente (risp. decrescente). Supponiamo per semplicità che $y_0 = f(x_0)$ sia interno a J. Eventualmente considerando $-f$ non è restrittivo supporre che f sia crescente. Per la proprietà dei limiti delle funzioni crescenti sappiamo che i due limiti destro e sinistro esistono e che

$$L^- := \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0) \leq \lim_{y \to y_0^+} f(x) := L^+ .$$

Basta dimostrare che i due limiti coincidono. Supponiamo per assurdo che invece

$$\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) < \lim_{y \to y_0^+} f(x) .$$

Quindi per $y < y_0$, $f^{-1}(y) \leq L^-$, mentre per $y > y_0$, $f^{-1}(y) \geq L^+$. Quindi l'immagine $J = f(I)$ non è un intervallo e questa è una contraddizione.

□

4. Estensione continua di funzioni definite su intervalli di $\mathbb{Q}$.

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Indichiamo con $I_{\mathbb{Q}} = I \cap \mathbb{Q}$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ è una funzione, indicheremo con $f : I_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ la sua restrizione. Siano F, G due funzioni continue definite su I. Supponiamo che le restrizioni coincidano: $f = g$. Allora anche $F = G$. Infatti per la densità di $\mathbb{Q}$, per ogni $b \in I$, esiste una successione $a : \mathbb{N} \to I_{\mathbb{Q}}$ tale che $a_n \to b$. Quindi, per la continuità di F e di G abbiamo $F(b) = \lim_{n \to +\infty} (f(a_n) = g(a_n)) = G(b)$. Possiamo riformulare questa osservazione nel modo seguente:

Proposizione 4.1. (Teorema di unicità dell'estensione continua) *Se una funzione $f : I_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ si estende ad una funzione continua $F : I \to \mathbb{R}$, allora tale estensione è unica.*

Ci rivolgiamo ora al problema della *esistenza* della estensione continua di una data $f : I_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$. Abbiamo già incontrato questa situazione quando nella dispensa sui numeri reali [Reali] abbiamo accennato alla definizione delle funzioni esponenziali. Allora eravamo stati necessariamente un po' vaghi. Adesso, grazie agli argomenti che abbiamo sviluppato, possiamo dare sostanza al discorso (torneremo sulle funzioni esponenziali alla fine di questa dispensa).
Allora sia data $f : I_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$. Chiaramente, una *condizione necessaria* affinché esista una estensione continua $F : I \to \mathbb{R}$ è che f sia continua. Ma il seguente esempio mostra che questo non è sufficiente.

Esempio 4.2. Consideriamo $I = [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$. Poniamo $D = [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{2}+1] = I_- \cup I_+$. Definiamo $F : D \to \mathbb{R}$ tale che $F(x) = -1$ per ogni $x \in I_-$, $F(x) = 1$ per ogni $x \in I_+$. Chiaramente F è continua su D ma non può essere estesa ad una funzione continua definita su tutto I. D'altra parte $I_Q = D \cap \mathbb{Q}$ e la restrizione f di F a $I_{\mathbb{Q}}$ è continua. L'unica estensione continua di f a D è F stessa, quindi f non può essere estesa ad una funzione continua definita su tutto I. Osserviamo che f, benché sia continua su $I_{\mathbb{Q}}$ ha il seguente "sgradevole" comportamento:
Per ogni $\delta > 0$, esistono $x, y \in I_{\mathbb{Q}}$ tali che $|x - y| < \delta$, mentre $|f(x) - f(y)| > 1$.

L'ultima osservazione nell'esempio suggerisce la seguente definizione che punta ad escludere un tale comportamento.

Definizione 4.3. Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita su un arbitrario sottoinsieme D di $\mathbb{R}$, si dice *uniformemente continua* se per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale per ogni coppia di punti $x, y \in D$ tali che $|x - y| < \delta$ si ha che $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Si noti che, come la continuità, la continuità uniforme è conservata dalle restrizioni:
Se $f : D \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua e $D' \subset D$ allora anche la restrizione di f a D' è uniformemente continua.

La funzione $f : I_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ dell'esempio è continua ma non è uniformemente continua. Dunque la continuità uniforme è una versione rafforzata della continuità. Questo fatto è ancora meglio messo in evidenza dalla seguente caratterizzazione equivalente della continuità uniforme. Ricordiamo ancora una volta la definizione di funzione continua:

La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è continua su D se per ogni $a \in D$, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ tale che per ogni $b \in D$ tale che $|b - a| < \delta$ si ha che $|f(b) - f(a)| < \epsilon$.

Abbiamo messo in evidenza che $\delta = \delta(\epsilon, a)$ dipende da ϵ ma anche dal punto a. La funzione è uniformemente continua se δ dipende da ϵ ma può essere scelto in *modo uniforme* rispetto al punto a. Precisamente abbiamo che:

La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua su D se per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tale che per ogni $a \in D$ e ogni $b \in D$ tale che $|b - a| < \delta$ si ha che $|f(b) - f(a)| < \epsilon$.

Vediamo ora una ulteriore notevole proprietà degli intervalli chiusi e limitati che è anch'essa conseguenza della compattezza.

Teorema 4.1. (Teorema della continuità uniforme) *Sia $I = [\alpha, \beta]$, un intervallo chiuso e limitato. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.*

Dim. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta_n = 1/n$, $n > 1$, esistono $x_n, y_n \in I$ tali che $|x_n - y_n| < \delta_n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. Consideriamo $a(n) = x_n$ e $b(n) = y_n$ come succesioni a valori in I. Per la compattezza di I, esiste una successione estratta da a sia $a \circ g$, tale che $(a \circ g)(n) \to c \in I$. Consideriamo ora la successione estratta da b, $(b \circ g)$. Sempre per la compattezza esiste una successione estratta $t := (b \circ g \circ h)$ tale che $t_n \to c' \in I$. Consideriamo infine $s := (a \circ g \circ h)$; si ha ancora che $s_n \to c$. Poiche' $|t_n - s_n| < \delta_{(g \circ h)(n)} \to 0$, si ha che $c = c'$. Per la continuità di f, $f(t_n) \to f(c)$ e $f(s_n) \to f(c)$. D'altra parte, poiché, $|f(t_n) - f(s_n)| > \epsilon$, si avrebbe che $|f(c) - f(c')| \geq \epsilon > 0$. Questo è impossibile, dunque f è uniformemente continua. □

Esempio 4.4. La condizione che l'intervallo sia chiuso è indispensabile. Infatti, per ogni $I = (0, b]$, $b > 1/2$, si consideri $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. f è continua ma non è uniformemente continua. Infatti, per ogni $b > \delta > 0$, poniamo $\bar{x} = \min\{\delta, 1/2\}$, $\bar{y} = \bar{x}/2$. Allora $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$, mentre $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = 1/\bar{x} \geq 2$. D'altra parte sappiamo che per ogni $0 < a < b$, la restrizione di f è uniformemente continua su $[a, b]$.

Abbiamo allora, immediatamente, il seguente corollario:

Lemma 4.5. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$. Condizione necessaria affinché f si estenda ad una funzione continua $F : I \to \mathbb{R}$ è che per ogni sotto-intervallo chiuso e limitato $J \subset I$, la restrizione di f a $J_{\mathbb{Q}}$ è uniformemente continua.*

Il risultato finale è che questa condizione è anche sufficiente.

Teorema 4.2. (Teorema di esistenza dell'estensione continua) *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora esiste una estensione continua di f, $F : I \to \mathbb{R}$, se e solo se per ogni sotto-intervallo chiuso e limitato $J \subset I$, la restrizione di f a $J_{\mathbb{Q}}$ è uniformemente continua.*

Dim. Resta da dimostrare che la condizione è sufficiente. Ci limiteremo a fornire alcune indicazioni (il lettore volenteroso può cercare di esplicitare tutti i dettagli). Intanto si dimostra che la condizione è sufficiente quando I è limitato e chiuso, e quindi per ipotesi f è uniformemente continua su $I_{\mathbb{Q}}$. Fissato $x \in I$, per la densità di $\mathbb{Q}$ esiste una successione $a : \mathbb{N} \to I_{\mathbb{Q}}$ tale che $a_n \to x$. Usando l'uniforme continuità di f si dimostra che

- $f(a_n) \to c \in \mathbb{R}$;
- Il valore limite $c := F(x)$ non dipende dalla scelta della successione a_n, ma dipende solo dal punto x.
- Se $x \in I_{\mathbb{Q}}$ allora $c = f(x)$.

Abbiamo così esteso f ad una $F : I \to \mathbb{R}$. Infine, sempre usando la continuità uniforme di f, si verifica che la funzione F così definita è continua. Se I è ora un intervallo arbitrario, lo realizziamo come l' unione di una successione crescente di sottointervalli chiusi e limitati: $I = \cup I_n$. Per il caso particolare già dimostrato, per ogni n, la restrizione f_n di f a $(I_n)_{\mathbb{Q}}$, si può estendere ad una funzione continua F_n definita su I_n. D'altra parte, per il Teorema di unicità dell'estensione continua, per ogni n, la restrizione di F_{n+1} a I_n coincide con F_n. Quindi per induzione è definita una estensione continua F di f definita su tutto $I = \cup I_n$. $\square$

5. Le funzioni esponenziali rivisitate

Riformuliamo, precisando un po' le cose, quanto avevamo già delineato nella dispensa sui numeri reali [Reali] . Fissato un numero reale $a > 0$, vogliamo definire una funzione $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ := \{y > 0\}$ che verifichi le seguenti proprietà:

- $F_a(1) = a$;
- Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $F_a(x + y) = F_a(x)F_a(y)$;
- F_a è *continua* (si noti che in [Reali] si alludeva in modo vago proprio a questa richiesta) .

Ragionando come in [Reali], si vede che la restrizione f_a di F_a a $\mathbb{Q}$ è forzata:

Per ogni $m/n \in \mathbb{Q}$, necessariamente $f_a(m/n) = a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$, dove per ogni $b > 0$, $b^{1/n}$ indica l'unica radice n-esima positiva di b.

Si può dimostrare allora che per ogni intervallo limitato e chiuso I di $\mathbb{R}$, la restrizione di f_a ad $I_{\mathbb{Q}}$ è uniformemente continua. Dunque per il teorema precedente esiste un'unica estensione continua $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si può verificare infine che tale F_a soddisfa tutte le proprietà richieste. Di solito, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si scrive $F_a(x) = a^x$ e questa funzione è detta la *funzione esponenziale di base a*; $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è la funzione inversa, è continua e verifica

$$\log_a(a) = 1, \text{ per ogni } z, t \in \mathbb{R}^+, \log_a(tz) = \log_a(t) + \log_a(z) \ .$$

Se e è la costante di Nepero, si verifica che $a^x = e^{\log(a)x}$, dove $\log = \log_e$ è il logaritmo naturale. La funzione esponenziale di base e ha alcune proprietà speciali e a volte viene indicata come $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Per esempio, abbiamo verificato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

mentre in generale vale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a) \ .$$

Quando avremo sviluppato il calcolo differenziale e integrale, risulterà che

$$1 = \exp(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = (\exp)'(0) \ .$$

Più profondamente vedremo che la funzione exp è caratterizzata come l'unica funzione definita su $\mathbb{R}$ derivabile tale che

- Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.

Mentre la funzione log è caratterizzata come l'unica funzione definita su $\mathbb{R}^+$ derivabile tale che

- Per ogni $y \in \mathbb{R}^+$, $(\log)'(y) = \dfrac{1}{y}$.
- $\log(1) = 0$.