Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 13 Giugno 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti)
Dire se la successione

$$a_n = n + 1 - \sqrt{n^2 + 1}$$

ammette limite per $n \to \infty$ e, in caso affermativo, calcolarlo.
SOLUZIONE
☐Il limite L non esiste perché

$\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale 1 perché operando le seguenti manipolazioni algebriche otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} n+1-\sqrt{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} n+1-\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{n+1+\sqrt{n^2+1}}{n+1+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2-(n^2+1)}{n+1+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

Esercizio 2. (3 punti) Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-4}dx$$

SOLUZIONE

I= $\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}$ Infatti, sviluppando gli usuali calcoli per gli integrali di funzioni razionali, si ha

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{3}.$

Esercizio 3.(4 punti)

Si consideri la formula

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ x(x^2-1) & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}$$

(1) Determinare il più grande sottoinsieme C di $\mathbf{R}$ in cui la formula definisce una funzione continua.
(2) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ in cui la formula definisce una funzione derivabile.
(3) Determinare il sottoinsieme M di $\mathbf{R}$ costituito dai punti di massimo locale per la funzione f
(4) Determinare il sottoinsieme N di $\mathbf{R}$ costituito dai punti di minimo locale per la funzione f.

SOLUZIONE.

(1) $C = \mathbf{R}$ perché negli insiemi $|x| > 1$ e $|x| < 1$ la funzione è composizione di funzioni elementari e quindi continua e nei punti ± 1 si ha che $\lim_{x\to\pm 1^-} f(x) = \lim_{x\to\pm 1^+} f(x) = 0$
(2) $D = \mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ perché al di fuori dei punti 1 e -1 la funzione è derivabile, mentre in quei punti il limite del rapporto incrementale non esiste. Infatti, ad esempio nel punto 1 si ha:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)((1+h)^2-1)-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(h+1)(h^2+2h)}{h} = 2$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$$

Analogamente nel punto -1.

(3) $M = (-\infty,-1)\cup\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\}\cup[1,+\infty)$. Infatti nei due insiemi aperti $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$ la funzione è costante e quindi tutti questi punti sono di massimo locale. Altri due punti di massimo locale sono il punto $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, come si verifica agevolmente con l'ausilio del calcolo differenziale e il punto 1 in quanto si verifica facilmente che la funzione $f(x)$ a sinistra di 1 è negativa.
(4) $N = (-\infty,-1]\cup\{\frac{\sqrt{3}}{3}\}\cup(1,+\infty)$. Infatti si vede in modo del tutto analogo al punto precedente che l'insieme $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ è costituito da punti di minimo locale essendo la funzione in questo insieme aperto costante, e ancora

in modo del tutto analogo al punto precedente si verifica che i punti $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e -1 sono punti di minimo locale.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (4,5 punti) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Riferendosi alla definizione di limite, esplicitare il significato della frase:

3 *non è il limite per* n *tendente ad infinito della successione* $\{a_n\}$

SOLUZIONE. Facendo riferimento alla definizione di limite, ricordiamo che l'espressione $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ significa esplicitamente che

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \ \forall n > n_0\ |a_n - 3| < \varepsilon.$$

Si tratta quindi di negare questa espressione. Quindi il significato esplicito della espressione è

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall n_0\ \ \exists n > n_0\ |a_n - 3| \geq \varepsilon.$$

Esercizio 2. (7 punti)

(1) Si fornisca una formula esplicita (si intende per esempio una formula del tipo di quella usata nell'esercizio 3 della prima parte) che definisca una funzione continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con le seguenti proprietà:
- -2 è un punto di minimo locale, 2 è un punto di massimo locale, $f(2) = f(-2) = 0$;
- La retta $y = 1$ è l'unico asintoto del grafico $G(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y = f(x)\}$;
- $f(1) = 2$.

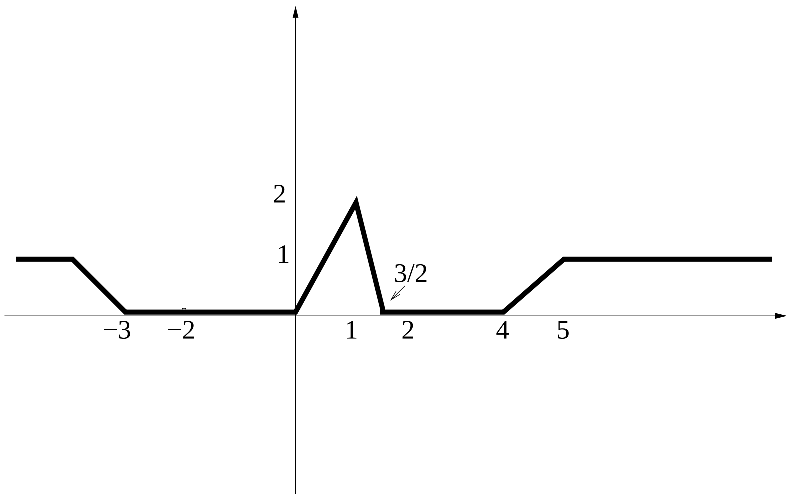
(2) Si disegni il grafico della funzione definita in (1)

SOLUZIONE. Di funzioni con questo comportamento ve ne sono moltissime. Questo è solo un esempio ottenuto definendo la funzione a tratti.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq -4 \\ -x-3 & \text{se } -4 < x \leq -3 \\ 0 & \text{se } -3 < x \leq 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -4x+6 & \text{se } 1 < x \leq \dfrac{3}{2} \\ 0 & \text{se } \dfrac{3}{2} < x \leq 4 \\ x-4 & \text{se } 4 < x \leq 5 \\ 1 & \text{se } 5 < x \end{cases}$$

La continuità di una tale funzione si ottiene con ragionamenti analoghi a quelli usati nell'esercizio 3 della prima parte.

La prossima figura mostra un grafico di questa funzione.



Esercizio 3. (4,5 punti) Si determinino gli $z \in \mathbf{C}$ appartenenti al qudrato $Q = [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$ e verificanti la relazione $e^{2z} + 1 = 0$.
SOLUZIONE. Le soluzioni dell'equazione proposta sono l'insieme dei numeri complessi della forma $\{\frac{\pi + 2k\pi}{2} i\}$, pertanto le soluzioni dell'equazione appartenenti a Q sono: $\{\frac{\pi}{2} i, \frac{3}{2}\pi i, -\frac{\pi}{2} i, -\frac{3}{2}\pi i\}$.

Esercizio 4. (8 punti)
Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$x^3 y' - y^2 = 0$$

tale che $y(1) = -2$.
SOLUZIONE. La soluzione generale dell'equazione proposta si calcola facilmente essendo l'equazione a variabili separabili. Otteniamo $y = \frac{2x^2}{1 - 2Cx^2}$. Imponendo la condizione $y(1) = -2$ si ottiene per la costante C il valore 1. Quindi la soluzione richiesta è $y = \frac{2x^2}{1 - 2x^2}$.