Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 19 Gennaio 2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Sia a_n la successione

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{2^n + n^n}}{n}$$

Si dica se esiste il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ e, in caso affermativo, calcolarlo.
SOLUZIONE.
☐ Il limite L non esiste $\quad$ $\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale 1
perché il limite proposto puó essere calcolato in vari modi: uno di questi è osservare che

$$n = \sqrt[n]{n^n} < \sqrt[n]{2^n + n^n}$$

e che per $n > 2$ si ha

$$\sqrt[n]{2^n + n^n} < \sqrt[n]{n^n + n^n} = \sqrt[n]{2n^n} = n\sqrt[n]{2}$$

da cui otteniamo

$$1 < a_n < \sqrt[n]{2}$$

da cui, per il teorema del confronto, la tesi.

Esercizio 2. (3 punti) Dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$$

SOLUZIONE

$\square$ Il limite L non esiste $\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale 1

perché si può calcolare il limite in vari modi. Dal teorema di de l'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \; e^{\sin x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x} = 1$$

Esercizio 3. (4 punti) Discutere la veridicità o meno dei seguenti enunciati.

(1) Sia a_n una successione di numeri reali convergente ad un limite finito $a \in \mathbf{R}$. Allora esiste un $K \in \mathbf{R}$ tale che $|a_n| \leq K$ per ogni n.

(2) Sia a_n una successione di numeri reali per cui esiste $K \in \mathbf{R}$ tale che per ogni n si ha $|a_n| \leq K$. Allora la successione converge ad un limite finito $a \in \mathbf{R}$.

SOLUZIONE.

(1) $\boxed{\text{X}}$ VERO $\square$ FALSO

perché dalla definizione stessa di limite si ha che fissato un ε esiste un $\overline{n}$ per cui se $n > \overline{n}$ si ha $|a_n - a| < \varepsilon$. Per cui detto K il massimo tra $\{|a_1|, \ldots, |a_{\overline{n}}|, |a + \varepsilon|, |a - \varepsilon|\}$ si ha $|a_n| \leq K$.

(2) $\square$ VERO $\boxed{\text{X}}$ FALSO

perché basta considerare la successione

$$a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1.$$

per fornire un controesempio.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (6 punti)
Sia $f(x)$ la funzione da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ definita dalla formula $f(x) = |x+2| - |x-2|$

(1) Si descriva il più grande sottoinsieme aperto D di $\mathbf{R}$ in cui la funzione $f(x)$ è derivabile.
(2) Descrivere l'insieme dei punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x)$
(3) Descrivere gli eventuali asintoti del grafico della $f(x)$.
(4) Sia a_n la successione definita da

$$a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Dire se esiste il $\lim_{n\to\infty} a_n$

SOLUZIONE.

(1) $D = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$. In tale insieme la funzione è derivabile valendo

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{per } x \leq -2 \\ 2x & \text{per } -2 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{per } 2 \leq x \end{cases}$$

mentre nel complementare, cioè nei punti 2 e -2, $f(x)$ non lo è in quanto il limite destro del rapporto incrementale è diverso dal limite sinistro.

(2)
- L'insieme dei punti di massimo assoluto è l'insieme $[2, +\infty)$
- L'insieme dei punti di massimo relativo è $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$
- L'insieme dei punti di minimo assoluto è $(-\infty, -2]$
- L'insieme dei punti di minimo relativo è $(-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$

(3) ☐ Il grafico non ammette asintoti
$\boxed{\text{X}}$ Gli asintoti del grafico della $f(x)$ sono le rette $y = -4$ e $y = 4$

perché, essendo la funzione definitivamente costante si ha che $\lim_{x\to-\infty} = -4$ e $\lim_{x\to\infty} = 4$.

(4) ☐ Il limite proposto non esiste $\boxed{\text{x}}$ Il limite esiste e vale 4
perché la successione a_n vale definitivamente 4.

Esercizio 2.(4 punti)
Sia $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{x^2+1}$

a) Provare che esiste almeno un $\overline{x} < 0$ tale che $f(\overline{x}) = 0$
b) Dire se un tale $\overline{x} < 0$ è unico.

SOLUZIONE.

a) Essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ esiste (permanenza del segno) un $K < 0$ tale che $f(K) < 0$. Poiché $f(0) = 1$ si ha che nell'intervallo $[K, 0]$ la funzione assume agli estremi valori opposti, quindi ha in tale intervallo almeno uno zero $\overline{x}$

b) Tale $\overline{x}$ è unico poiché la derivata della funzione $f(x)$ vale $f'(x) = e^x - \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ e per $x < 0$ $f'(x) > 0$, quindi la funzione è strettamente crescente.

Esercizio 3.(6 punti) Sia X l'insieme degli $z \in \mathbf{C}$ per cui

$$e^{|z|^2 - z^2} = 1$$

Provare che $X = \mathbf{R}$
SOLUZIONE.
Una verifica immediata mostra che $\mathbf{R} \subset X$. Per mostrare il viceversa sia $z = a + ib$ un numero complesso. Si ha

$$e^{|z|^2 - z^2} = e^{a^2+b^2-(a^2-b^2+2abi)} = e^{2b^2-2abi} = e^{2b^2} e^{-2abi} = e^{2b^2}(\cos(-2ab) + i\sin(-2ab))$$

da cui si ha che, dovendo avere tale numero modulo 1, necessariamente deve essere $b = 0$ e quindi $z \in \mathbf{R}$.

Esercizio 4. (8 punti)
Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y = \sin t$$

tale che $y(0) = y'(0) = 1$.
SOLUZIONE.
Essendo le soluzioni dell'equazione caratteristica -2 e 2, si ha che la soluzione generale dell'equazione omogenea è del tipo $C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$. Facendo i calcoli otteniamo $y'' = -\alpha \sin t - \beta \cos t$ e quindi

$$-\alpha \sin t - \beta \cos t - 4(\alpha \sin t + \beta \cos t) = -5\alpha \sin t - 5\beta \cos t = \sin t$$

che per l'indipendenza delle funzioni $\sin t$ e $\cos t$ implica $\alpha = -\dfrac{1}{5}$ e $\beta = 0$. Quindi la soluzione dell'equazione proposta è del tipo $C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - \dfrac{1}{5}\sin t$.
Imponendo ora le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 - \dfrac{1}{5} & = 1 \end{cases}$$

da cui si ottiene $C_1 = \dfrac{1}{5}$ e $C_2 = \dfrac{4}{5}$.
In definitiva la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y(t) = \dfrac{1}{5}e^{-2t} + \dfrac{4}{5}e^{2t} - \dfrac{1}{5}\sin t$.