Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 8 Febbraio 2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Provare che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{1}{3}$.

SOLUZIONE Osserviamo che (cfr. dispensa LIMSUCC pag. 7)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

da cui otteniamo che

$$\frac{1}{3} < \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n} < \frac{1}{3}\sqrt[n]{2}.$$

Da cui, passando ai limiti, per il teorema del confronto, essendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, si ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2. (4 punti) Per ognuna delle seguenti funzioni continue $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dire quali sono iniettive e quali surgettive

$$f_1 = x^4 \qquad f_2 = (x^2-1)(x-3) \qquad f_3 = x(x^2+1) \qquad f_4 = e^{\sin x}$$

SOLUZIONE.

(1) La funzione $f_1 = x^4$

è
- iniettiva ☐ SI $\boxed{\text{X}}$ NO perhé ad esempio$f_1(-1) = f_1(1) = 1$.
- surgettiva ☐ SI $\boxed{\text{X}}$ NO perhé nessun numero negativo può essere nell'immagine.

(2) La funzione $f_2 = (x^2-1)(x-3)$

è
- iniettiva ☐ SI $\boxed{\text{X}}$ NO perhé ad esempio $f_2(1) = f_2(3) = 0$.
- surgettiva $\boxed{\text{X}}$ SI ☐ NO perché $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$ e si applica il teorema dei valori intermedi (cfr. dispensa INTERVALLI pag. 3).

(3) La funzione $f_3 = x(x^2+1)$

è
- iniettiva $\boxed{\text{X}}$ SI ☐ NO perhé è sempre crescente, essendo la sua derivata $3x^2+1$ sempre positiva
- surgettiva $\boxed{\text{X}}$ SI ☐ NO perché $\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ e si applica il teorema dei valori intermedi (cfr. dispensa INTERVALLI pag. 3).

(4) la funzione $f_4 = e^{\sin x}$

è
- iniettiva ☐SI $\boxed{\text{X}}$ NO perhé ad esempio $f_4(0) = f_4(2\pi) = 1$
- surgettiva ☐ SI $\boxed{\text{X}}$ NO perhé nessun numero negativo può essere nell'immagine

Esercizio 3. (3 punti)
Ricordiamo che una successione a_n si dice *divergente* se il suo limite per n tendente ad infinito è $+\infty$ o $-\infty$.
Discutere la veridicità o meno dei seguenti enunciati.

(1) Sia a_n una successione di numeri reali divergente. Allora non esiste $K \in \mathbf{R}$ tale che $|a_n| \leq K$ per ogni n.
(2) Sia a_n una successione di numeri reali tale che per ogni $K \in \mathbf{R}$ esiste n tale che $|a_n| \geq K$. Allora la successione diverge.

SOLUZIONE.

(1) $\boxed{\text{X}}$ VERO ☐FALSO perché se la successione a_n tende a $+\infty$ ciò significa che per ogni $K \in \mathbf{R}$ esiste un $\overline{n}$ per cui $\forall n > \overline{n}$ si ha $a_n > K$ e analogamente nel caso che a_n tenda a $-\infty$ per ogni $K \in \mathbf{R}$ esiste un $\overline{n}$ per cui $\forall n > \overline{n}$ si ha $a_n < K$. Per cui la successione dei moduli $|a_n|$ non può essere limitata.

(2) ☐VERO $\boxed{\text{X}}$ FALSO perché ad esempio la successione $(-1)^n n$ non è regolare e la successione $|(-1)^n n| = n$ non è limitata.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (6 punti) Per ognuno dei seguenti limiti se ne studi l'esistenza o meno e in caso affermativo lo si calcoli.

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \sin e^x \qquad L_2 = \lim_{x\to-\infty} \sin e^x \qquad L_3 = \lim_{x\to+\infty} e^{\sin x}$$

SOLUZIONE.

- $\boxed{\text{X}}$ Il limite L_1 non esiste ☐Il limite L_1 esiste e vale
  perché si possono trovare due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ divergenti a $+\infty$ (ad esempio $a_n = \log(2n\pi)$ e $b_n = \log(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ tali che $\lim\limits_{n\to\infty} \sin e^{a_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} \sin e^{b_n}$
- ☐Il limite L_2 non esiste $\boxed{\text{X}}$ Il limite L_2 esiste e vale 0
  perché $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- $\boxed{\text{X}}$ Il limite L_3 non esiste ☐Il limite L_3 esiste e vale
  perché si possono trovare due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ divergenti a $+\infty$ (ad esempio $a_n = 2n\pi$ e $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ tali che $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\sin a_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} e^{\sin b_n}$

Esercizio 2. (7 punti)
Sia $f(x)$ una funzione continua da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$. Si consideri la funzione integrale F definita

$$F(x) = \int_0^x (|f(t)| + 1)dt$$

Dimostrare che

(1) F è una funzione continua.
(2) F è una funzione iniettiva.
(3) Fè una funzione invertibile, nel senso che, detto B l'insieme immagine di F, esiste una funzione $G : B \to \mathbf{R}$ tale che $G \circ F = id_{|\mathbf{R}}$.
(4) la funzione G è derivabile in tutti i punti di B.
(5) F è una funzione surgettiva, cioè $B = \mathbf{R}$

SOLUZIONE.

(1) La funzione F è continua in ogni punto x_0 in quanto in ogni punto x_0 è derivabile: $F'(x_0) = |f(x_0)| + 1$
(2) La funzione F è iniettiva poiché sempre crescente in quanto la sua derivata è positiva in ogni punto.
(3) La funzione F essendo iniettiva è invertibile con inversa G definita sull'immagine di F.
(4) La funzione G è derivabile in tutti i punti del suo dominio poiché la derivata di F è sempre diversa da 0.
(5) La surgettività di F si ha come conseguenza del fatto che
    (a) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ e
    (b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

    (a) si ottiene osservando che $F(x) = \displaystyle\int_0^x (|f(t)| + 1)dt \geq \int_0^x 1dt = x$ e quindi $\lim_{x \to +\infty} F(x) \geq \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.
    (b) si ottiene in maniera analoga osservando che, posto $y = -x$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{y \to +\infty} F(-y)$ e

$$F(-y) = \int_0^{-y} (|f| + 1)dt = -\int_{-y}^0 (|f| + 1)dt \leq -\int_{-y}^0 1dt = -y.$$

che, per y tendente a $+\infty$, tende a $-\infty$.

Esercizio 3.(3 punti)
Si descriva l'insieme Z delle soluzioni della seguente equazione

$$z^6 + 1 = 0$$

SOLUZIONE.
Si tratta di calcolare le radici seste del numero complesso $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.
Ricordando la formula di De Moivre abbiamo che tali radici sono i numeri complessi del tipo $z = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}$.
Pertanto $Z = \{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\}$

Esercizio 4. (8 punti)
Si consideri l'equazione differenziale al primo ordine

$$(t^2 - 9)y' = 1$$

(1) Si dica se ha soluzioni costanti
(2) Si determini se esiste una soluzione tale che $y(0) = 1$

SOLUZIONE.

(1) L'equazione non ha soluzioni costanti, in quanto se $y = c$ fosse soluzione si avrebbe $y' = 0$ che non verifica la relazione proposta.
(2) Nell'insieme $\mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$ abbiamo che l'equazione è equivalente a

$$y' = \frac{1}{t^2 - 9}$$

Usando la decomposizione di Hermite per le funzioni razionali abbiamo

$$\frac{1}{t^2 - 9} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{t - 3} - \frac{1}{t + 3}\right)$$

da cui otteniamo per le primitive l'espressione $y(t) = \frac{1}{6}\log\frac{|t - 3|}{|t + 3|} + c$.

Osserviamo che $y(0) = c$, quindi la soluzione richiesta è la funzione $y(t) = \frac{1}{6}\log\frac{|t - 3|}{|t + 3|} + 1$.