Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO B 31 Gennaio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA........................ VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Dire se la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{\log n}$$

ammette limite per $n \to \infty$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

SOLUZIONE

$\boxed{\text{X}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ esiste e vale e $\square$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ non esiste.

perché, se indichiamo con b_n la successione $\log n$ abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$$

e questo limite, tendendo b_n a $+\infty$, tende al numero e.(vedi dispensa [LIMSUCC] pag. 6)

Esercizio 2. (3 punti) Calcolare

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)dx$$

SOLUZIONE. $I = \dfrac{2}{15}$.
Perché, cfr. dispensa [P-ELEMENTARI] pag. 3,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)\cos(x)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)(1-\sin^2(x))d(\sin(x)).$$

Quindi operando la sostituzione $t = \sin(x)$ otteniamo

$$I = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Esercizio 3. (4 punti) Per ciascuna delle seguenti formule determinare il più grande $D \subset \mathbf{R}$ tale che la formula definisca una funzione $f : D \to \mathbf{R}$

(1) $\log(1+3x^2)$
(2) $\log_3[x]$, dove con $[x]$ si è indicata la parte intera di x.
(3) $\log(|\cos x|)$
(4) $\sqrt{\log(|\cos x|)}$

SOLUZIONE.

(1) $D = \mathbf{R}$ poiché $1+3x^2$ è strettamente maggiore di zero per ogni x reale.
(2) $D = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 1\}$ poiché la funzione logaritmo è definita solo per gli $x \in \mathbf{R}$ strettamente positivi e la parte intera di un numero $x \in [0,1)$ è 0.
(3) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$ poiché la funzione $|\cos(x)|$ è sempre positiva tranne nei punti dell'insieme $\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$, ove vale 0.
(4) $D = \{k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$. La funzione $\log(|\cos x|)$ è definita per gli $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$, inoltre essendo la funzione $|\cos(x)|$ sempre compresa tra 0 e 1, la funzione $\log(|\cos x|)$ è sempre negativa nel suo dominio di definizione tranne nei punti dell'insieme $\{k\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$ ove vale 0.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (10 punti) Ricordiamo che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice periodica se esiste un $T \neq 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = f(x+T)$. In tal caso T è detto un periodo di f. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti funzioni sono periodiche e, se del caso, dire se esiste un periodo positivo minimo.

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in 3\mathbf{Z} \\ 0 & \text{se } x \notin 3\mathbf{Z} \end{cases}$

(2) $f(x) = \cos(|x|)$.

(3) $f(x) = -x$

(4) $f(x) = 5$

SOLUZIONE.

(1) La funzione è periodica e qualsiasi multiplo di 3 è un periodo. Infatti se ad esempio $T = 3$ si ha che $f(x+3) = f(x)\ \ \forall x \in \mathbf{R}$ perché se $x \in 3\mathbf{Z}$, cioè x è multiplo di 3, anche $x + 3$ lo è, e quindi $f(x+3) = f(x) = 1$, e se $x \notin 3\mathbf{Z}$, cioè x non è multiplo di 3, anche $x+3$ non lo è e quindi $f(x+3) = f(x) = 0$. Il ragionamento si può ripetere per ogni multiplo di 3.

In questo caso si ha che 3 è il minimo dei periodi positivi.

(2) Poiché $\cos(-x) = \cos(x)$ si ha che la funzione $\cos(|x|)$ vale $\cos(x)$ sia per $x \geq 0$ che per $x \leq 0$ e quindi la funzione è periodica e qualsiasi multiplo di 2π è un periodo. 2π è il periodo positivo minimo.

(3) La funzione non è periodica poiché se T fosse un periodo non nullo si avrebbe per ogni x reale $-x = f(x) = f(x+T) = -x - T$. Assurdo

(4) La funzione è periodica ed ogni numero reale non nullo è un periodo, in quanto $\forall T\ \ (\neq 0)$ si ha che $\forall x \in \mathbf{R}\ \ 5 = f(x) = f(x+T) = 5$. In questo caso non vi è un periodo minimo positivo.

Esercizio 2. (3,5 punti) Siano A e B due insiemi tali che $|A| = 8$ e $|B| = 4$ e sia $C \subset A$ con $|C| = 6$. Calcolare la cardinalità degli insiemi

$$\mathcal{F}_1 = \{f : B \to A |\ f \text{ iniettiva e } f(B) \subset C\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{f : B \to A |\ f \text{ iniettiva e } f(B) \not\subset C\}$$

SOLUZIONE.
$|\mathcal{F}_1| = 360$ $|\mathcal{F}_2| = 1320$
La cardinalità delle applicazioni iniettive tra un insieme con h elementi ed uno con k $(\geq h)$ elementi è $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-h+1)$ (cfr. dispensa [INSIEMI] pag.6).
Pertanto, poiché le applicazioni iniettive $f : B \to A$ tali che $f(B) \subset C$ altro non sono che le applicazioni iniettive $f : B \to C$, abbiamo che $|\mathcal{F}_1| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.
Un modo per calcolare $|\mathcal{F}_2|$ è quello di osservare che $\mathcal{F}_2$ è il complementare di $\mathcal{F}_1$ nell'insieme di tutte le applicazioni iniettive $f : B \to A$. Le applicazioni iniettive $f : B \to A$ sono $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$, e quindi $|\mathcal{F}_2| = 1680 - 360 = 1320$

Esercizio 3. (3,5 punti) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e sia F la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x (f^2(t) + 2)dt.$$

(1) Dire se F è derivabile e in tal caso determinare F'.
(2) Dimostrare che $F(x)$ ha un unico zero.

SOLUZIONE.

(1) Poiché la funzione $f^2(x)+2$ è continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione F è derivabile e la sua detivata è $f^2(x) + 2$.
(2) La funzione F ha uno zero per $x = 0$. Tale zero è l'unico per il teorema di Rolle: se ne avesse un altro la derivata avrebbe uno zero ma la derivata è sempre strettamente positiva.

Esercizio 4. (7 punti) Sia $p(x)$ il polinomio $x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 12$.

(1) Verificare che $p(i) = 0$.

(2) Si consideri l'equazione differenziale

$$p(x)y' = 7x - 11 \ .$$

Determinare tutte le soluzioni massimali, specificando in particolare per ognuna l'intervallo di definizione.

SOLUZIONE.

(1) $p(i) = i^4 - 7i^3 + 13i^2 - 7i + 12 = 1 + 7i - 13 - 7i + 12 = 0$.

(2) Il polinomio $p(x)$ è a coefficienti reali, quindi anche $\bar{i} = -i$ è radice e quindi $p(x)$ risulta divisibile per $x^2 + 1$.

$$p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 7x + 12) = (x^2 + 1)(x - 3)(x - 4).$$

Quindi nell'insieme $\mathbf{R} \setminus \{3, 4\}$ risulta

$$y' = \frac{7x - 11}{x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 12} = -\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x - 4}$$

Pertanto, per ogni c la restrizione della funzione

$$y = -\arctan x + \log \frac{|x - 4|}{|x - 3|} + c$$

a ciascuno degli intervalli $(-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty) = \mathbf{R} \setminus \{3, 4\}$ fornisce una soluzione massimale in tale insieme.