

Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO B 21 Febbraio 2015

COGNOME NOME

MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3,5 punti) Dire se la successione

$$a_n = \frac{n^7 + 5^n}{n^7}$$

ammette limite per $n \rightarrow \infty$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

Esercizio 1. (3,5 punti)

SOLUZIONE

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ non esiste
perché risulta

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste e vale ∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 + 5^n}{n^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 \left(1 + \frac{5^n}{n^7}\right)}{n^7} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n}{n^7}\right)}{1}$$

e si ha (cfr. dispensa [LIMITI2] pag 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n^7} = \infty$.

Esercizio 2. (3,5 punti) Dire quale delle frasi (1) (2) (3) (4) (5) (6) è la negazione della frase

Tutti gli asini miagolano e grugniscono

- (1) Esiste almeno un asino che non miagola o che non grugnisce
- (2) Nessun asino miagola o nessun asino grugnisce
- (3) Esiste un asino che miagola o che non grugnisce
- (4) Tutti i gatti miagolano e tutti i maiali grugniscono
- (5) Nessun asino miagola e grugnisce
- (6) Tutti gli asini ragliano

SOLUZIONE.

1 2 3

4 5 6

Nessuna di tutte queste; la negazione corretta è

Esercizio 3. (3 punti) Calcolare la derivata della funzione $f = \cos \log \sqrt{x^2 + 1}$

SOLUZIONE. Applicando le regole di derivazione alla funzione f , che risulta definita e derivabile in tutto \mathbf{R} , si ha

$$f' = -\frac{x \sin(\log(\sqrt{x^2 + 1}))}{x^2 + 1}$$

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (6 punti) Sia $f(x)$ la funzione $x^5 + \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- (1) Calcolare, se esistono, i limiti $L_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $L_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (2) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $u \in \mathbf{R}$ tale che $f(u) = a$
- (3) Per gli a per cui un siffatto u esiste, dire se tale u è unico o no.

SOLUZIONE.

- (1) $L_- = -\infty$ Il limite L_- non esiste
- $L_+ = +\infty$ Il limite L_+ non esiste
perché

$$L_{\mp} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left(x^5 + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} x^5 \left(1 + \frac{\frac{e^x}{e^x + 1}}{x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} x^5 = \mp\infty$$

perché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^5 = \pm\infty$ e la funzione $\frac{e^x}{e^x + 1}$ è limitata ($0 < \frac{e^x}{e^x + 1} < 1$).

- (2) Gli a per cui tale u esiste sono tutti gli $a \in \mathbf{R}$. Infatti, poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, per ogni a esistono $c < b$ tali che $f(c) < a$, $f(b) > a$, cioè $a \in [f(c), f(b)]$. La funzione è elementare continua definita su tutto \mathbf{R} . Quindi la restrizione su l'intervallo $[c, b]$ è continua. Per il teorema dei valori intermedi (cfr. dispensa [C-INTERVALLI]) esiste allora $u \in [c, b]$ tale che $f(u) = a$.
- (3) Per ogni a esiste un unico u tale che $f(u) = a$. Infatti la funzione è elementare derivabile su \mathbf{R} . Se ne esistessero due distinti $u_1 < u_2$, per il Teorema di Rolle esisterebbe $x \in [u_1, u_2]$ tale che $f'(x) = 0$. Ma si verifica immediatamente che per ogni $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$.

Esercizio 2. (6 punti)

Siano f_1, f_2, f_3, f_4 le funzioni definite su $\mathbf{R} \setminus 0$ dalle formule

$$f_1 = \frac{\sin x}{e^x - 1}, f_2 = \frac{\cos(x) - 1}{e^x - 1}, f_3 = \frac{\sin |x|}{e^x - 1}, f_4 = \frac{|\cos(x) - 1|}{e^x - 1}$$

Dire quali di queste funzioni si estendono ad una funzione continua su tutto \mathbf{R} .

SOLUZIONE.

Per vedere se la funzione $f = f_1, f_2, f_3, f_4$ si estende ad una funzione continua su tutto \mathbf{R} studiamone il limite per $x \rightarrow 0$. Se esiste finito e uguale a $l \in \mathbf{R}$, f si estende in modo continuo ponendo $f(0) = l$. Altrimenti non si estende.

Per $f = f_1$ e per $f = f_2$ si vede immediatamente, sia utilizzando la regola dell'Hopital sia considerando gli sviluppi di Taylor fino ad un ordine sufficiente, che tale limite finito esiste e vale rispettivamente 1 e 0.

Per $f = f_3$, nel calcolare il limite occorre tener conto che a seconda che si considerino le x vicino a 0 positive o negative, il numeratore vale rispettivamente $\sin x$ o $-\sin x$ poiché $\sin(-x) = -\sin x$ e che quindi il $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3 = 1$ mentre $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_3 = -1$: pertanto f_3 non è prolungabile con continuità nell'origine.

Infine per la funzione f_4 tenendo conto del fatto che le x vicino a 0 positive o negative non influenzano il valore del coseno poiché $\cos x = \cos(-x)$ e del fatto che $|\cos x - 1| = 1 - \cos x$ si ha che il $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4 = 0$ come anche $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_4 = 0$ e quindi f_4 è prolungabile con continuità nell'origine.

Esercizio 3. (6 punti) Sia F la funzione razionale

$$F = \frac{5x^4 + 7x^3 + 5}{x^4 + 1}$$

Determinare l'insieme di definizione di F e l'insieme di tutte le primitive.

SOLUZIONE.

L'insieme di definizione della funzione F è tutto \mathbf{R} essendo il denominatore della frazione una funzione sempre diversa da 0.

Per calcolare l'insieme delle primitive conviene esprimere la funzione F

$$F = \frac{5x^4 + 7x^3 + 5}{x^4 + 1} = 5 + \frac{7x^3}{x^4 + 1} = 2 + \frac{7}{4} \frac{4x^3}{x^4 + 1} =$$

Da cui integrando si ha che l'insieme delle primitive è costituito dalla classe di funzioni

$$\left\{ 5x + \frac{7}{4} \log(x^4 + 1) + c \right\}$$

al variare della costante c .

Esercizio 4. (6 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$(e^x + 1)^2 y' = e^x.$$

Determinare tutte le soluzioni massimali, specificando in particolare per ognuna l'intervallo di definizione.

SOLUZIONE. L'equazione è a variabili separabili, quindi otteniamo al fine della ricerca delle soluzioni

$$y' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

da cui integrando otteniamo la famiglia di funzioni

$$y = \frac{e^x}{(e^x + 1)} + c$$

il cui intervallo massimale di definizione è tutto \mathbf{R} .