Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO A 5 Luglio 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 19$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(10 punti)

a) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = \dfrac{x^2 \log(x^2)}{1 + \log(x^2)}$ definisce una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.
b) Determinare il sottoinsieme $\bar{D} \subset \bar{\mathbf{R}}$ formato dai punti di accumulazione dell'insieme D.
c) Giustificare che f è continua su D.
Per ogni $x_0 \in \bar{D}$, determinare se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e nel caso esista calcolarlo.
d) Determinare il più grande sottoinsieme D' di $\mathbf{R}$ tale che $D \subset D'$ ed esiste $F : D' \to \mathbf{R}$ continua tale che la restrizione di F su D coincide con f (in formula: $F|D = f$).
e) Il punto 0 è un punto di minimo locale di f? E di F?
f) Tracciare un grafico qualitativo della funzione F.

SOLUZIONE.
a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{e^{-1}}, 0, \sqrt{e^{-1}}\}$

b) $\bar{D} = \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

c)

- -) La funzione f è continua su D perché si ottiene a partire da funzioni fondamentali, applicando successivamente un numero finito di procedure che conservano la continuità.
- -) Il limite non esiste nei punti $\pm\sqrt{\frac{1}{e}}$ poiché in tali punti il limite destro è diverso dal limite sinistro.
- -) Il limite esiste nei punti x_0 di D dove tale limite vale $f(x_0)$, nel punto 0 dove tale limite vale 0 e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

d) $D' = D \cup \{0\} = \mathbf{R} \setminus \{\pm\sqrt{e^{-1}}\}$ perché basta definire $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ mentre f non è estendibile nei punti $\{-\sqrt{e^{-1}}, \sqrt{e^{-1}}\}$.

e)

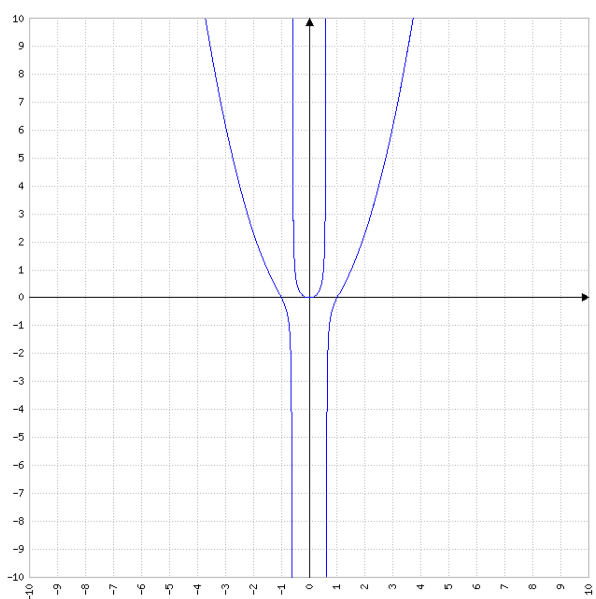
-) Il punto 0
□ è un punto di minimo locale di f.
$\boxed{\text{x}}$ non è un punto di minimo locale di f.

perché non appartiene al dominio della funzione f.

-) Il punto 0
$\boxed{\text{x}}$ è un punto di minimo locale di F.
□ non è un punto di minimo locale di F.

perché la funzione $F(x)$ è positiva in un intorno di 0 tranne il punto 0 dove vale 0.

f) Grafico qualitativo della funzione F.



3. Seconda parte

Esercizio 1.(2 punti) Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice di tipo *non-*$\mathcal{P}$ se $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x+\alpha) \neq f(x)$. Dare, negando questa definizione, la definizione di funzione di tipo $\mathcal{P}$ e fornire un esempio di una funzione di tipo $\mathcal{P}$

SOLUZIONE.
Una funzione si dice di tipo $\mathcal{P}$ se $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}$ $f(x+\alpha) = f(x)$.
Una funzione di tipo $\mathcal{P}$ è semplicemente una funzione periodica di periodo α.
Nota. Non essendo fatta nessuna specificazione su α, si può prendere come α lo 0. Ciò implica che ogni funzione è nella classe $\mathcal{P}$ poiché ogni funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è periodica di periodo 0. Conseguentemente la classe *non-*$\mathcal{P}$ è vuota.

Esercizio 2.(2 punti)
Dire se esiste il seguente limite e nel caso esista calcolarlo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^n + n!}$$

SOLUZIONE.
☐Il limite L non esiste perché

$\boxed{\text{x}}$ Il limite L esiste e vale 1 perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^n + n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n!}{n^n} + 1}$$

. Ricordando che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ si ottiene la tesi.

Esercizio 3.(5 punti)
1) Dato $z = 2 + i \in \mathbf{C}$, determinare $w = a + ib \in \mathbf{C}$ tale che $zw = 1$.
2) Siano $z = p + iq \neq 0 \in \mathbf{C}$, $w = a + ib \in \mathbf{C}$ tale che $zw = 1$. Dimostrare che $q > 0$ se e solo se $b < 0$.
3) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ dell'equazione $e^z = i$.

SOLUZIONE.
1) $w = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

2) w è l'inverso di z, pertanto risulta $b = -\frac{q}{p^2 + q^2}$. Essendo $p^2 + q^2 > 0$ si ha la tesi.

3)Le soluzioni di $e^z = i$ sono $\{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i\}$ al variare di n nei numeri interi.

Esercizio 4.(5 punti) Siano $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ due funzioni continue tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Dimostrare che esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $f(b) = g(b)$.

SOLUZIONE.
Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$. Si ha che $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -3$ e $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Pertanto, per la permanenza del segno, esistono punti $a < 0$ tale che $h(a) < 0$ e $c > 0$ tale che $h(c) > 0$. Quindi esiste un punto $b \in [a, c]$ tale che $h(b) = 0$.

Esercizio 5.(6 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \cos x$$

SOLUZIONE

La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Si calcola (ad esempio con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie o co n altre considerazioni) che $\frac{1}{2} x \sin x$ è una soluzione particolare per cui la soluzione generale è del tipo

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$$

Esercizio 6.(4 punti)

Calcolare

$$I = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x-4)} dx$$

SOLUZIONE.

$I = -\frac{2}{3} \log 2$

perché: $I = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x-4)} dx = \int_2^3 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{3} \left[\log \left| \frac{x-4}{x-1} \right| \right]_2^3 =$
$\frac{1}{3} \left(\log \frac{1}{2} - \log 2 \right) = -\frac{2}{3} \log 2$