Journal für die reine und angewandte Mathematik
Herausgegeben von **Helmut Hasse** und **Hans Rohrbach**
Sonderdruck aus Band 260, Seite 181 bis 199
Verlag Walter de Gruyter · Berlin · New York 1973

Sur l'existence et la régularité des solutions faibles d'une inéquation parabolique non linéaire

Par *Hugo Beirão-da-Veiga* et *João-Paulo Dias**) à Lisboa

0. Introduction

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\boldsymbol{R}^N$ de frontière Γ, variété de dimension $N-1$ et de classe C^1 [1]), Ω étant localement situé d'un seul côté de Γ. On pose $\Lambda = \Omega \times]0, T[$, où $0 < T < +\infty$, et on désigne par (x, t) le point générique de Λ avec $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Posons[2])

$$V = H^1(\Omega),\ \mathfrak{V} = L^2(0, T; V), \tag{0. 1}$$

$$L^{p,s}(\Lambda) = L^s(0, T; L^p(\Omega)),\ 1 \leqq p, s \leqq +\infty, \tag{0. 2}$$

$$\mathfrak{E} = L^{2,\infty}(\Lambda) \cap \mathfrak{V}, \tag{0. 3}$$

qu'on munit de leurs normes usuelles. En particulier nous avons sur $\mathfrak{E}$ la norme

$$\| u \|_{\mathfrak{E}} = \| u \|_{2,\infty,\Lambda} + \| u \|_{\mathfrak{V}}. \tag{0. 4}$$

Soient

$$\mathfrak{W} = \{u \in \mathfrak{V} \mid u' = \frac{du}{dt} \in \mathfrak{V}' = L^2(0, T; V') \text{ dual de } \mathfrak{V}\},$$

$$\mathfrak{W}_1 = \{u \in \mathfrak{V} \mid u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\},$$

où u' est la derivée au sens des distributions vectorielles. On munit $\mathfrak{W}$ de la norme

$$\| u \|_{\mathfrak{W}} = \| u \|_{\mathfrak{V}} + \| u' \|_{\mathfrak{V}'}. \tag{0. 5}$$

Il est bien connu que

$$\mathfrak{W} \hookrightarrow C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{V} \text{ muni de la norme (0. 4)} \tag{0. 6}$$

(où $\hookrightarrow$ signifie injection continue).

*) Chercheurs du «Instituto de Física e Matemática» (Lisbonne).
[1]) Cette condition peut être affaiblie.
[2]) On ne considère que des fonctions réelles.

Soient q et r tels que

$$(0.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{N}{2q}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{N}{4}, & & \\ q\in\left[2,\dfrac{2N}{N-2}\right], & r\in[2,\infty] & \text{si } N>2, \\ q\in[2,\infty[\,, & r\in\,]2,\infty] & \text{si } N=2, \\ q\in[2,\infty]\,, & r\in[4,\infty] & \text{si } N=1. \end{cases}$$

On sait (cf. [5], chap. II, § 3) qu'on a alors

$$(0.8)\qquad \mathfrak{E}\hookrightarrow L^{q,r}(\Lambda).$$

Ceci résulte aussi par interpolation (cf. [1], § 1); par exemple dans le cas $N>2$ on a $\mathfrak{E}\hookrightarrow L^{2,\infty}(\Lambda)\cap L^{2^*,2}(\Lambda)$ $\Big($car le théorème de Sobolev entraîne $\mathfrak{V}\hookrightarrow L^{2^*,2}(\Lambda)$ avec $2^*=\dfrac{2N}{N-2}\Big)$ et en outre, par interpolation, $L^{2,\infty}(\Lambda)\cap L^{2^*,2}(\Lambda)\hookrightarrow L^{q,r}(\Lambda)$ avec

$$(0.9)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{2^*}+\dfrac{1-\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{N} \\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1-\alpha}{\infty}=\dfrac{\alpha}{2} \end{cases},\qquad \alpha\in[0,1],$$

et, en plus,

$$(0.10)\qquad \|u\|_{q,r,\Lambda}\leqq\|u\|^{\alpha}_{2^*,2,\Lambda}\,\|u\|^{1-\alpha}_{2,\infty,\Lambda}.$$

Ceci étant on se donne des fonctions réelles $B_k(x,t,y,z)$, $k=0,1,\ldots,N$, définies en $\Lambda\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^N$, mesurables en $(x,t)\in\Lambda$ pour tout $(y,z)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^N$ et continues en $(y,z)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^N$ pour presque tout $(x,t)\in\Lambda$. On suppose encore qu'il existe des constantes positives a et $\bar a$ et des fonctions b, f, d, m, g, e, h, non négatives et mesurables en Λ telles que pour tout $(y,z)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^N$ et pour presque tout $(x,t)\in\Lambda$ on a $\Big($avec $z=(z_1,\ldots,z_N)$, $|z|^2=\sum\limits_{i=1}^{N}z_i^2\Big)$:

$$(0.11)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}B_i(x,t,y,z)\,z_i\geqq a\,|z|^2-b(x,t)\,y^2-f(x,t) \\ |B_0(x,t,y,z)|\leqq d(x,t)\,|z|+m(x,t)\,|y|+g(x,t) \\ |B_i(x,t,y,z)|\leqq\bar a\,|z|+e(x,t)\,|y|+h(x,t), \qquad i=1,\ldots,N. \end{cases}$$

Soient p et s, $1\leqq p,\ s\leqq\infty$, tels que

$$(0.12)\qquad \begin{cases} 0\leqq\dfrac{N}{2p}+\dfrac{1}{s}<1 & \text{si } N\geqq 2, \\ \dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{N}{2p}+\dfrac{1}{s}<1 & \text{si } N=1, \end{cases}$$

et définissons χ_0, p_0, s_0 par

$$(0.13)\qquad \begin{cases} \dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} = 1 - \chi_0, \\[2mm] \dfrac{1}{p_0} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\chi_0}{N + 2\chi_0} \cdot \dfrac{1}{p'}, \\[2mm] \dfrac{1}{s_0} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{\chi_0}{N + 2\chi_0} \cdot \dfrac{1}{s'}, \end{cases}$$

où, en général, $\dfrac{1}{r'} = 1 - \dfrac{1}{r}$, $1 \leqq r \leqq \infty$. Nous supposerons que

$$(0.14)\qquad b, f, m, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda),\ g \in L^{p_0,s_0}(\Lambda).$$

Pour presque tous les $t \in]0, T[$ on peut définir

$$(0.15)\qquad (A(t)\,u, v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega B_i(x, t, u, \nabla u)\, D_i\, v dx + \int_\Omega B_0(x, t, u, \nabla u)\, v dx,\ \forall\, u, v \in V,$$

où $\nabla u = (D_1 u, \ldots, D_N u)$, $D_i\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ au sens de $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Il est aisé de voir qu'on a ainsi défini pour presque tous les $t \in]0, T[$ un opérateur

$$A(t) : V \to V'$$

et de plus on a

$$(0.16)\qquad \left| \int_0^T (A(t)\, u(t), v(t))\, dt \right| \leqq c(1 + \| u \|_{\bar p, \bar s, \Lambda} + \| \nabla u \|_{2,2,\Lambda})\, (\| v \|_{\bar p, \bar s, \Lambda} + \| \nabla v \|_{2,2,\Lambda}),$$

$\forall\, u, v \in \mathfrak{E}$, avec $\bar p = 2p'$ et $\bar s = 2s'$; remarquons que $\mathfrak{E} \hookrightarrow L^{\bar p, \bar s}(\Lambda)$ puisque si l'on pose

$$(0.17)\qquad q = \bar p\left(1 + \frac{2\chi_0}{N}\right),\ r = \bar s\left(1 + \frac{2\chi_0}{N}\right)$$

on a

$$(0.18)\qquad \begin{cases} \dfrac{N}{2q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{N}{4}, & \\[2mm] q \in \left]2, \dfrac{2N}{N-2}\right[,\ r \in]2, \infty[& \text{si } N \geqq 2, \\[2mm] q \in]2, \infty],\ r \in [4, \infty[& \text{si } N = 1. \end{cases}$$

D'après (0.16) il existe alors un opérateur $A : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$ ainsi défini

$$(0.19)\qquad [Au, v] = \int_0^T (A(t)\, u(t), v(t))\, dt\ \ \forall\, u, v \in \mathfrak{E},$$

et tel que

$$(0.20)\qquad \| Au \|_{\mathfrak{E}'} \leqq c(1 + \| u \|_{\mathfrak{E}}), \qquad \forall u \in \mathfrak{E}.$$

Soit maintenant K le convexe fermé et non vide de V défini par

$$(0.21)\qquad K = \{v \in V \mid v \geqq 0 \text{ [3] sur } \Gamma\}$$

et posons

$$(0.22)\qquad \mathfrak{K} = \{v \in \mathfrak{V} \mid v(t) \in K \text{ p. p. en }]0, T[\};$$

$\mathfrak{K}$ est un convexe fermé et non vide de $\mathfrak{V}$.

---

[3]) Au sens des traces sur Γ.

Soit maintenant u une solution du problème suivant:

(0. 23) $\qquad u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{K}$, $u(0) = u_0$ donné dans $\boldsymbol{K}$,

$$\int_0^T (v'(t) + A(t)u(t), v(t) - u(t))\, dt \geqq \frac{1}{2}(\| v(T) - u(T) \|^2 - \| v(0) - u_0 \|^2),$$

$\forall\, v \in \mathfrak{W}_1 \cap \mathfrak{K}$, oú $\| \cdot \|$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$.

Ce problème est une formulation faible du problème considéré dans [3]. Dans le § 1 du présent travail on généralise, pour les solutions du problème (0. 23), les Théorèmes I et II de [3]. Plus précisement on démontrera les résultats suivants:

Théorème I. *Soit u une solution de* (0. 23) *et supposons que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Alors $u \in L^\infty(\Lambda)$. De plus, étant donnée une constante $c \geqq 0$, il existe $\bar{c} = \bar{c}(c, N, \Omega, T, a, p, s) \geqq 0$ telle que si $\| b \|_{p,s,\Lambda}$, $\| f \|_{p,s,\Lambda}$, $\| m \|_{p,s,\Lambda}$, $\| d^2 \|_{p,s,\Lambda}$, $\| g \|_{p_0,s_0,\Lambda}$, $\| u_0 \|_{\infty,\Omega} \leqq c$ alors $\| u \|_{\infty,\Lambda} \leqq \bar{c}$.*

Théorème II. *Soit u une solution de* (0. 23) *et supposons de plus que $g \in L^{p,s}(\Lambda)$ et $u_0 \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$. Alors il existe des constantes $c \geqq 0$ et $\alpha \in]0, \lambda]$, ne dépendant que de N, Ω, T, a, $\bar{a}$, p, s et λ, telles que $u \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\bar{\Lambda})$ et de plus*

$$\begin{aligned} ||| u |||^2_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} &\equiv (\| u \|_{\infty,\Lambda} + [u]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda})^2 \\ &\leqq c\{[u_0]^2_{\lambda,\Omega} + \| f \|_{p,s,\Lambda} + \| h^2 \|_{p,s,\Lambda} + \| u \|_{\infty,\Lambda} \| g \|_{p,s,\Lambda} \\ &\quad + \| u \|^2_{\infty,\Lambda}(1 + \| b \|_{p,s,\Lambda} + \| m \|_{p,s,\Lambda} + \| d^2 \|_{p,s,\Lambda} + \| e^2 \|_{p,s,\Lambda})\}. \end{aligned}$$

On a désigné par $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant λ sur $\bar{\Omega}$ et par $C^{0,\alpha,\alpha/2}(\bar{\Lambda})$ l'espace des fonctions $v(x, t)$ définies en $\bar{\Lambda}$ telles que

$$| v(x, t) - v(x', t') | \leqq c(| x - x' |^\alpha + | t - t' |^{\alpha/2}),\ \forall\, (x, t), (x', t') \in \bar{\Lambda}.$$

On pose

$$[v]_{\lambda,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{| v(x) - v(y) |}{| x - y |^\lambda},\ v \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}),$$

$$[v]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} = \sup_{\substack{(x,t),(x',t')\in\bar{\Lambda} \\ (x,t)\neq(x',t')}} \frac{| v(x, t) - v(x', t') |}{| x - x' |^\alpha + | t - t' |^{\alpha/2}}.$$

Dans le § 2 on démontrera un théorème d'existence et d'unicité pour le problème (0. 23) avec quelques hypothèses supplémentaires sur l'opérateur A. Plus précisemment supposons $N > 2$ (les cas $N = 1$, 2 se traitent d'une façon analogue) et admettons qu'on a (0. 14) et en outre

(0. 24) $\qquad d \in L^{N,\infty}(\Lambda)$, $g \in L^{\frac{2N}{N+2},2}(\Lambda)$ et $m \in L^{p_1,s_1}(\Lambda)$

avec

$$\frac{N}{2p_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r_1} \text{ et } \frac{1}{s_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r_1},\ \text{oú } r_1 \in [2, \infty[.$$

Remarquons qu'on a $\mathfrak{E} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ avec injection dense et donc $\mathfrak{B}' \hookrightarrow \mathfrak{E}'$.

Sous l'hypothèse (0. 24), et avec q_1 donné par

$$\frac{N}{2q_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{4}{N}, \tag{0. 25}$$

on obtient facilement

$$\left| \int_0^T \int_\Omega B_0(x, t, u, \nabla u)\, v\, dx dt \right| \tag{0. 26}$$
$$\leqq c(1 + \| u \|_{q_1, r_1, A} + \| \nabla u \|_{2,2,A}) \| v \|_{2^*, 2, A}, \ \forall\, u \in \mathfrak{E},\ \forall\, v \in \mathfrak{B}$$

d'où

$$| [Au, v] | \leqq c(1 + \| u \|_{\bar{p}, \bar{s}, A} + \| u \|_{q_1, r_1, A} + \| \nabla u \|_{2,2,A}) \tag{0. 27}$$
$$\cdot (\| v \|_{2^*, 2, A} + \| \nabla v \|_{2,2,A}),\ \forall\, u \in \mathfrak{E},\ \forall\, v \in \mathfrak{B},$$

et ainsi

$$| [Au, v] | \leqq c(1 + \| u \|_{q, r, A} + \| u \|_{q_1, r_1, A} + \| u \|_{\mathfrak{B}}) \| v \|_{\mathfrak{B}} \tag{0. 28}$$
$$\forall\, u \in \mathfrak{E},\ \forall\, v \in \mathfrak{B},$$

$$A : \mathfrak{E} \to \mathfrak{B}' \text{ et } \| Au \|_{\mathfrak{B}'} \leqq c(1 + \| u \|_{q, r, A} + \| u \|_{q_1, r_1, A} + \| u \|_{\mathfrak{B}}) \tag{0. 29}$$
$$\leqq c(1 + \| u \|_{\mathfrak{E}}),\ \forall\, u \in \mathfrak{E}.$$

Ceci étant considérons l'hypothèse suivante:

(0. 30) Pour toute suite $u_n \in \mathfrak{E}$ et tout $u \in \mathfrak{E}$ tels que

(i) $\| u_n \|_{\mathfrak{E}} \leqq C^{te}$, $\forall\, n$,

(ii) $u_n \underset{n \to \infty}{\to} u$ dans $\mathfrak{B}$ faible et dans $L^{q, \bar{s}}(A)$ fort (q donné par (0. 17), $\bar{s} = 2s'$),

(iii) $\limsup_n \int_{t_0}^{t_1} (A(t) u_n(t), u_n(t) - u(t))\, dt \leqq 0$, où $0 \leqq t_0 < t_1 \leqq T$,

on a

$$\liminf_n \int_{t_0}^{t_1} (A(t) u_n(t), u_n(t) - v(t))\, dt \geqq \int_{t_0}^{t_1} (A(t) u(t), u(t) - v(t))\, dt,\ \forall\, v \in \mathfrak{B}.$$

Soit maintenant $u_0 \in K$ tel que

$$\frac{[Av, v - u_0]}{\| v \|_{\mathfrak{B}}} \to +\infty \text{ quand } \| v \|_{\mathfrak{B}} \to \infty,\ v \in \mathfrak{E}. \tag{0. 31}$$

On a le théorème suivant:

Théorème III. *Supposons vérifiées les hypothèses* (0. 14), (0. 24), (0. 30), (0. 31). *Alors il existe un u tel que*

$$u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{K},\ u(0) = u_0, \tag{0. 32}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (v'(t) + A(t) u(t), v(t) - u(t))\, dt \geqq \frac{1}{2} (\| v(t_1) - u(t_1) \|^2 - \| v(t_0) - u(t_0) \|^2),$$
$$\forall\, v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K},\ \forall\, t_0, t_1 \text{ vérifiant } 0 \leqq t_0 \leqq t_1 \leqq T.$$

De plus si l'on a

$$u_1, u_2 \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{K},\ [Au_1 - Au_2, u_1 - u_2] \leqq 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \tag{0. 33}$$

alors la solution de (0. 32) *est unique.*

Pour la démonstration du Théorème III on utilise des méthodes analogues à celles employées par J. L. Lions dans le chap. 3 de [8]. On remarque aussi (cf. (2. 36)) que la condition (0. 31) peut être affaiblie et on démontrera dans un apêndice (avec les méthodes de [7]) que si la condition

$$(0.\,34)\qquad z \neq z^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} [B_i(x, t, y, z) - B_i(x, t, y, z^*)] \cdot (z_i - z_i^*) > 0$$

est vérifiée pour chaque $y \in \boldsymbol{R}$ et pour presque tous les $(x, t) \in \Lambda$, alors (0. 30) est aussi vérifiée[4]).

1. Démonstration des théorèmes I et II

Rappelons qu'on a

$$(1.\,1)\qquad \mathfrak{E} \hookrightarrow \mathfrak{V} \hookrightarrow L^{2,2}(\Lambda) = L^2(\Lambda) \hookrightarrow \mathfrak{V}' \hookrightarrow \mathfrak{E}'$$

avec injections denses, et que, par définition,

$$(1.\,2)\qquad [Au, v] = \int_0^T (A(t)u(t), v(t))\, dt, \ \forall\, u, v \in \mathfrak{E}$$

d'où $A : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$.

Soient maintenant $u_0 \in \boldsymbol{K}$ et $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{K}$ avec $u(0) = u_0$. Soient u_n définies par

$$(1.\,3)\qquad \frac{1}{n} u_n' + u_n = u, \qquad u_n(0) = u_0,$$

pour $n = 1, 2, \ldots$. D'après la théorie des semi-groupes fortement continus on a (cf. [6], chap. 2, § 9)

$$(1.\,4)\qquad u_n \in \mathfrak{W}_1 \cap \mathfrak{K},$$

$$(1.\,5)\qquad u \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ dans } C^0 = C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \text{ et dans } \mathfrak{V} \text{ et donc dans } \mathfrak{E}.$$

On a encore, si u est une solution de (0. 23),

$$(1.\,6)\qquad \frac{1}{n} \int_0^T \|u_n'(t)\|^2\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

En effet posons $v = u_n$ dans l'inéquation de (0. 23); il vient

$$\frac{1}{n} \int_0^T \|u_n'(t)\|^2\, dt = \int_0^T (u_n'(t), u(t) - u_n(t))\, dt$$

$$\leqq \int_0^T (A(t)u(t), u_n(t) - u(t))\, dt \leqq \|Au\|_{\mathfrak{E}'} \|u_n - u\|_{\mathfrak{E}} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Soit toujours u une solution de (0. 23) et soit $\zeta(x, t)$ une fonction lipschitzienne dans $\boldsymbol{R}^{N+1}$ telle que $0 \leqq \zeta(x, t) \leqq 1$. Soit $k \in \boldsymbol{R}$ et supposons que

$$(1.\,7)\qquad k \geqq 0 \text{ si } \zeta(x, t) \text{ n'est pas identiquement nulle sur } \Gamma \times \boldsymbol{R}.$$

Soient t_0, t_1 tels que $0 \leqq t_0 < t_1 \leqq T$ et posons $\{u\}^k = \min(u, k)$, $u^{(k)} = u - \{u\}^k$. On a $u^{(k)} \in \mathfrak{E}$ et avec l'hypothèse (1. 7) on a

$$v = u - \zeta^2 u^{(k)} \in \mathfrak{K}.$$

---

[4]) En supposant vérifiées (0. 14) et (0. 24).

Nous voulons démontrer l'inégalité suivante

$$(1.8)\qquad \frac{1}{2}\,||\,\zeta\, u^{(k)}\,||^2\,|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} \zeta\,\zeta'(u^{(k)})^2\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (Au, \zeta^2 u^{(k)})\,dt \leqq 0,$$

où

$$||\,\zeta\, u^{(k)}\,||^2\,|_{t_0}^{t_1} = ||\,\zeta(t_1)\,u^{(k)}(t_1)\,||^2 - ||\,\zeta(t_0)\,u^{(k)}(t_0)\,||^2.$$

On supposera pendant la démonstration $0 < t_0$ et $t_1 < T$ car les cas $t_0 = 0$ et $t_1 = T$ se traitent d'une façon analogue, mais simplifiée.

Soit $\xi_n(t)$ définie par

$$(1.9)\qquad \xi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left[t_1 + \dfrac{1}{n}\,,\; +\infty\right[, \\ -nt + (nt_1 + 1) & \text{si } t \in \left[t_1, t_1 + \dfrac{1}{n}\right], \\ 1 & \text{si } t \in [t_0, t_1], \\ nt + (1 - nt_0) & \text{si } t \in \left[t_0 - \dfrac{1}{n}\,,\; t_0\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\infty, t_0 - \dfrac{1}{n}\right], \end{cases}$$

où on suppose n suffisament grand pour avoir $0 \leqq t_0 - \dfrac{1}{n}$, $t_1 + \dfrac{1}{n} \leqq T$ (remarquons que si $t_1 = T$ on poserait $\xi_n(t) = 1$ pour $t \in [t_0, +\infty[$, et analoguement pour le cas $t_0 = 0$). Posons $\zeta_n(x, t) = \xi_n(t)\,\zeta(x, t)$ et soit

$$(1.10)\qquad v_n = u_n - \zeta_n^2 u_n^{(k)} \in \mathfrak{W}_1 \cap \mathfrak{K}.$$

Il est aisé de voir qu'on a

$$(1.11)\qquad u_n^{(k)} \underset{n\to\infty}{\to} u^{(k)} \qquad \text{dans } C^0 \cap \mathfrak{V},$$

et, en outre,

$$(1.12)\qquad ||\,\zeta_n^2\, u_n^{(k)}\,||_{\mathfrak{E}} \leqq c\, ||\, u_n^{(k)}\,||_{\mathfrak{E}} \leqq \mathrm{C}^{\text{te}},$$

$$(1.13)\qquad ||\,\zeta_n^2\, u_n^{(k)}\,||_{L^2(t_1, T; L^2(\Omega))} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\,||\, u_n^{(k)}\,||_{C^0} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Compte tenu que $L^2(t_1, T; L^2(\Omega))$ est dense dans $\left(L^\infty(t_1, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(t_1, T; V)\right)'$ on déduit d'après (1.12) et (1.13) (cf. [9], chap. V, § 1, Théor. 3) que $\zeta_n^2\, u_n^{(k)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ dans $L^\infty(t_1, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(t_1, T; V)$ faible et alors en particulier

$$(1.14)\qquad \int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{n}} (Au, \zeta_n^2\, u_n^{(k)})\,dt = \int_{t_1}^{T} (Au, \zeta_n^2\, u_n^{(k)})\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

De même on démontre que

$$(1.15)\qquad \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0} (Au, \zeta_n^2\, u_n^{(k)})\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Ceci étant écrivons

$$(1.16)\qquad \int_{t_0}^{t_1} (u_n' + Au, \zeta^2 u_n^{(k)})\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (u_n' + Au, u_n - v_n)\,dt$$

$$= \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_1+\frac{1}{n}} (u_n' + Au, u_n - v_n)\,dt - \int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{n}} (u_n' + Au, \zeta_n^2 u_n^{(k)})\,dt - \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0} (u_n' + Au, \zeta_n^2 u_n^{(k)})\,dt.$$

Puisque

$$\int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{n}} (u_n', \zeta_n^2 u_n^{(k)})\, dt = n \int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{n}} \int_\Omega (u - u_n)\, \zeta_n^2 u_n^{(k)}\, dx\, dt$$

$$\leqq n \cdot \frac{1}{n} \| u - u_n \|_{C^0} \| u_n^{(k)} \|_{C^0} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

on a, d'après (1. 14),

(1. 17) $$\int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{n}} (u_n' + Au, \zeta_n^2 u_n^{(k)})\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

De même on démontre que

(1. 18) $$\int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0} (u_n' + Au, \zeta_n^2\, u_n^{(k)})\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Voyons maintenant que

(1. 19) $$\limsup_n \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_1+\frac{1}{n}} (u_n' + Au, u_n - v_n)\, dt \leqq 0.$$

On a

(1. 20) $$\int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_1+\frac{1}{n}} (u_n' + Au, u_n - v_n)\, dt = \int_0^T (u_n' + Au, u_n - v_n)\, dt$$

$$= \int_0^T (v_n' + Au, u - v_n)\, dt + \int_0^T (Au, u_n - u)\, dt + \int_0^T (u_n', u_n - u)\, dt$$

$$+ \int_0^T (u_n' - v_n', u_n - v_n)\, dt + \int_0^T (u_n' - v_n', u - u_n)\, dt,$$

(1. 21) $$\int_0^T (v_n' + Au, u - v_n)\, dt \leqq \frac{1}{2} \| u - v_n \|^2 \Big|_T^0 = \frac{1}{2} \| u - u_n + \zeta_n^2 u_n^{(k)} \|^2 \Big|_T^0$$

d'après (0. 23),

(1. 22) $$\left| \int_0^T (Au, u_n - u)\, dt \right| \leqq \| Au \|_{\mathfrak{E}'} \| u_n - u \|_{\mathfrak{E}} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

(1. 23) $$\int_0^T (u_n', u_n - u)\, dt = -\frac{1}{n} \int_0^T \| u_n' \|^2 dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

d'après (1. 6),

(1. 24) $$\int_0^T (u_n' - v_n', u_n - v_n)\, dt = \frac{1}{2} \| u_n - v_n \|^2 \Big|_0^T = \frac{1}{2} \| \zeta_n^2 u_n^{(k)} \|^2 \Big|_0^T,$$

(1. 25) $$\int_0^T \int_\Omega (u_n' - v_n')\, (u - u_n)\, dx\, dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega 2\, \zeta_n\, \zeta_n' u_n^{(k)} (u - u_n)\, dx\, dt$$

$$+ \frac{1}{n} \int_0^T \int_\Omega u_n' \zeta_n^2 (u_n^{(k)})'\, dx\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

puisque

$$\left|\int_0^T\int_\Omega 2\,\zeta_n\,\zeta_n'\,u_n^{(k)}(u-u_n)\,dx\,dt\right| = \left|\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega 2\,\zeta\zeta'\,u_n^{(k)}\,(u-u_n)\,dx\,dt\right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{n}}\int_\Omega 2\,\zeta_n\,\zeta_n'\,u_n^{(k)}(u-u_n)\,dx\,dt + \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0}\int_\Omega 2\,\zeta_n\,\zeta_n'\,u_n^{(k)}\,(u-u_n)\,dx\,dt\right|$$

$$\leqq c(\|\,u_n^{(k)}\,\|_{C^0}\,\|\,u-u_n\,\|_{C^0} + \frac{1}{n}\cdot n\,\|\,u_n^{(k)}\,\|_{C^0}\,\|\,u-u_n\,\|_{C^0}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

et

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega u_n'\,\zeta_n^2(u_n^{(k)})'\,dx\,dt\right| = \left|\frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega (u_n^{(k)})'\,\zeta_n^2(u_n^{(k)})'\,dx\,dt\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n}\int_0^T\int_\Omega (u_n')^2\,dx\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

par (1. 6).

Donc, d'après (1. 20), . . ., (1. 25), on a (1. 19) et, d'après (1. 16), (1. 17), (1. 18) et (1. 19), on obtient

$$\limsup_n \int_{t_0}^{t_1} (u_n' + Au,\,\zeta^2 u_n^{(k)})\,dt \leqq 0. \tag{1. 26}$$

Calculons maintenant la limite indiquée dans le premier membre de (1. 26):

$$\int_{t_0}^{t_1} (u_n' + Au,\,\zeta^2 u_n^{(k)})\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega u_n'\zeta^2 u_n^{(k)}\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (Au,\,\zeta^2 u_n^{(k)})\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega (u_n^{(k)})'\,u_n^{(k)}\,\zeta^2\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (Au,\,\zeta^2 u_n^{(k)})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\|\,\zeta\,u_n^{(k)}\,\|^2\,\big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \zeta\,\zeta'\,(u_n^{(k)})^2\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (Au,\,\zeta^2 u_n^{(k)})\,dt$$

ce qui donne par (1. 11)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t_1} (u_n' + Au,\,\zeta^2\,u_n^{(k)})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\|\,\zeta\,u^{(k)}\,\|^2\,\big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega \zeta\,\zeta'\,(u^{(k)})^2\,dx\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (Au,\,\zeta^2 u^{(k)})\,dt;$$

ceci avec (1. 26) entraîne (1. 8).

De même avec $k \in \boldsymbol{R}$ quelconque et $u_{(k)} = u - \{u\}_k$, où $\{u\}_k = \max\,(u, k)$, on démontre une estimation analogue à (1. 8), à savoir, on obtient (1. 8) avec $u_{(k)}$ à la place de $u^{(k)}$. Remarquons que dans ce cas la fonction $v = u - \zeta^2 u_{(k)} \in \mathfrak{K}$ pour tout $k \in \boldsymbol{R}$.

Les démonstrations des théorèmes I et II sont faites à partir de ces estimations comme celles des Théorèmes I et II de [3] (cf. les §§ 1 et 2 de [3]). Remarquons que (1. 8) coincide avec (2. 9) de [3] (ceci pour le cas de la continuité hölderienne); pour obtenir la regularité $L^\infty(\Lambda)$ il suffit de prendre dans (1. 8) $\zeta \equiv 1$ et $t_0 = 0$ (cf. (1. 1), (1. 2) de [3]).

2. Démonstration du Théorème III

Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé du Théorème III; en particulier on suppose $N > 2$, la démonstration étant analogue dans les cas $N = 1, 2$. On a

(2. 1) $\quad A : \mathfrak{E} \to \mathfrak{V}'$ et $\| Au \|_{\mathfrak{V}'} \leqq c(1 + \| u \|_{q,r,\Lambda} + \| u \|_{q_1,r_1,\Lambda} + \| u \|_{\mathfrak{V}})$,

$\forall\, u \in \mathfrak{E}$, où q et r sont donnés dans (0. 17), r_1 est donné dans (0. 24) et q_1 dans (0. 25).

Soit maintenant $u \in \mathfrak{W}$. Compte tenu de (0. 10) il vient

$$\| u \|_{q,r,\Lambda} \leqq \| u \|^{\alpha}_{2^*,2,\Lambda} \| u \|^{1-\alpha}_{2,\infty,\Lambda} \leqq c \| u \|^{\alpha}_{\mathfrak{V}} (\| u \|_{\mathfrak{V}} + \| u' \|_{\mathfrak{V}'})^{1-\alpha}$$

car $\mathfrak{V} \hookrightarrow L^{2^*,2}(\Lambda)$ et $\mathfrak{W} \hookrightarrow \mathfrak{E}$. Analoguement

$$\| u \|_{q_1,r_1,\Lambda} \leqq c \| u \|^{\alpha_1}_{\mathfrak{V}} (\| u \|_{\mathfrak{V}} + \| u' \|_{\mathfrak{V}'})^{1-\alpha_1}$$

d'où

(2. 2) $\quad \| Au \|_{\mathfrak{V}'} \leqq c(1 + \| u \|_{\mathfrak{V}} + \| u \|^{\alpha}_{\mathfrak{V}} \| u' \|^{1-\alpha}_{\mathfrak{V}'} + \| u \|^{\alpha_1}_{\mathfrak{V}} \| u' \|^{1-\alpha_1}_{\mathfrak{V}'}), \quad \forall\, u \in \mathfrak{W}$.

Par l'inégalité d'Young et puisque $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha_1 \in]0, 1]$ on en déduit que pour chaque $\theta \in]0, 1[$ il existe $c(\theta)$ telle que

(2. 3) $\qquad \| Au \|_{\mathfrak{V}'} \leqq c(\theta)\,(1 + \| u \|_{\mathfrak{V}}) + \theta \| u' \|_{\mathfrak{V}'}, \quad \forall\, u \in \mathfrak{W}$.

On a encore le lemme suivant:

Lemme 2. 1. *Soit* $\mathfrak{W}_2 = \{v \in \mathfrak{V} \mid v' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$ *muni de sa norme naturelle. Alors on a*

(2. 4) $\qquad \mathfrak{W}_2 \hookrightarrow L^{\bar{s}}(0, T; L^q(\Omega))$ *avec injection compacte,*

(2. 5) $\qquad \mathfrak{W} \hookrightarrow L^{\bar{s}}(0, T; L^q(\Omega))$ *avec injection compacte.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du Théorème 2, b de [2] compte tenu qu'on a (i) $V \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec injection compacte car $q < 2^*$, (ii) $L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ (ou V') car $q > 2$, (iii) $r > 2$ et $\bar{s} < r$.

Ceci étant nous allons passer à la démonstration du Théorème III. Nous utiliserons la méthode de la pénalisation (cf. [8], chap. 3, §§ 5 et 6). Soit alors $\beta : V \to V'$ un opérateur borné, hémi-continu et monotone tel que

(2. 6) $\qquad K = \{v \in V \mid \beta\, v = 0\}$,

(2. 7) $\qquad \| \beta v \|_{V'} \leqq c(1 + \| v \|_V), \quad \forall\, v \in V$,

(2. 8) $\qquad (\beta\, u, w) = 0, \ \forall\, u \in V, \ \forall\, w \in H^1_0(\Omega)$.

Ces conditions sont vérifiées par exemple par l'opérateur défini par

$$(\beta\, u, v) = -\int_\Gamma u^- v d\Gamma, \quad \forall\, u, v \in V,$$

où $u^- = -\min(u, 0)$. Pour $u \in \mathfrak{V}$ on pose

(2. 9) $\qquad (\bar{\beta}\, u)(t) = \beta(u(t)),\ t \in]0, T[$.

On a

(2. 10) $\qquad \bar{\beta} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}',\ \| \bar{\beta}\, v \|_{\mathfrak{V}'} \leqq c(1 + \| v \|_{\mathfrak{V}}), \quad \forall\, v \in \mathfrak{V}$,

(2. 11) $\qquad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta} \text{ est borné, hémi-continu, monotone et} \\ \mathfrak{K} = \{v \in \mathfrak{V} \mid \bar{\beta}\, v = 0\}. \end{array} \right.$

Soit alors $u_0 \in K$ tel que (0. 31) soit vérifié. Posons, pour $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon v = A(v + u_0) + \frac{1}{\varepsilon}\bar{\beta}(v + u_0). \tag{2. 12}$$

Alors, compte tenu de (2. 3), (2. 5), (2. 10), (2. 11)[5]), (0. 30)[6]) et (0. 31) il est aisé de vérifier que, pour

$$L = \frac{d}{dt}\,,\; D(L) = \{v \in \mathfrak{W} \mid v(0) = 0\},$$

l'opérateur B_ε vérifie les conditions de l'énoncé du Théorème 1. 2 du chap. 3 de [8]. Donc il existe un $v_\varepsilon \in \mathfrak{W}$ tel que

$$\begin{cases} v'_\varepsilon + A(v_\varepsilon + u_0) + \dfrac{1}{\varepsilon}\bar{\beta}(v_\varepsilon + u_0) = 0, \\ v_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{2.12'}$$

Posons $u_\varepsilon = v_\varepsilon + u_0$. On a $u_\varepsilon \in \mathfrak{W}$ et

$$\begin{cases} u'_\varepsilon + Au_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\bar{\beta}\, u_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon(0) = u_0\ ^{7}). \end{cases} \tag{2. 13}$$

Soit $\tau \in [0, T]$. Il vient de (2. 13), compte tenu que $\beta\, u_0 = 0 = u'_0$,

$$\int_0^\tau (u'_\varepsilon - u'_0,\, u_\varepsilon - u_0)\, dt + \int_0^\tau (Au_\varepsilon,\, u_\varepsilon - u_0)\, dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau (\beta\, u_\varepsilon - \beta u_0,\, u_\varepsilon - u_0)\, dt = 0 \tag{2. 14}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\| u_\varepsilon(\tau) - u_0 \|^2 \leqq \left| \int_0^\tau (Au_\varepsilon,\, u_\varepsilon - u_0)\, dt \right|$$

et, puisque

$$\| u_\varepsilon(\tau) \|^2 \leqq (\| u_\varepsilon(\tau) - u_0 \| + \| u_0 \|)^2 \leqq 2(\| u_\varepsilon(\tau) - u_0 \|^2 + \| u_0 \|^2)$$

on arrive à

$$\| u_\varepsilon(\tau) \|^2 \leqq 4\left| \int_0^\tau (Au_\varepsilon,\, u_\varepsilon - u_0)\, dt \right| + 2\, \| u_0 \|^2. \tag{2. 15}$$

Avec $\tau = T$ on obtient de (2. 14) que

$$[Au_\varepsilon,\, u_\varepsilon - u_0] = \int_0^T (Au_\varepsilon,\, u_\varepsilon - u_0)\, dt \leqq 0$$

d'où, par (0. 31),

$$\| u_\varepsilon \|_{\mathfrak{W}} \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \tag{2. 16}$$

---

5) Puisque $\bar{\beta} u_0 = 0$ il vient $[\bar{\beta}(v + u_0), v] = [\bar{\beta}(v + u_0) - \bar{\beta} u_0, (v + u_0) - u_0] \geqq 0$.

6) Avec $t_0 = 0$, $t_1 = T$.

7) L'existence de u_ε (solution du problème non homogène) sort directement du corollaire 2 de [4] lequel admet le Théorème 1. 2 du chap. 3 de [8] comme cas particulier.

Alors de (2. 15), (2. 16) et (0. 29) il vient

$$(2.17)\qquad \| u_\varepsilon(\tau) \|^2 \leqq 4 \| A u_\varepsilon \|_{\mathfrak{B}'} \| u_\varepsilon - u_0 \|_{\mathfrak{B}} + 2 \| u_0 \|^2$$
$$\leqq 4\, c(1 + \| u_\varepsilon \|_{2,\infty,A} + \| u_\varepsilon \|_{\mathfrak{B}}) \| u_\varepsilon - u_0 \|_{\mathfrak{B}} + 2 \| u_0 \|^2$$

d'où, compte tenu de (2. 16) et en faisant τ parcourir $[0, T]$,

$$\| u_\varepsilon \|^2_{2,\infty,A} \leqq c(1 + \| u_\varepsilon \|_{2,\infty,A}),$$

c'est à dire

$$(2.18)\qquad \| u_\varepsilon \|_{2,\infty,A} \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

et donc

$$(2.19)\qquad \| u_\varepsilon \|_{\mathfrak{E}} \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

D'après (2. 19) et (0. 29) il s'ensuit finalement

$$(2.20)\qquad \| A u_\varepsilon \|_{\mathfrak{B}'} \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

Soit $L^* = -\dfrac{d}{dt}$, $D(L^*) = \{v \in \mathfrak{B} \mid v(T) = 0\}$. Puisque

$$[L\, u, v] = [L^*\, v, u], \quad \forall\, u \in D(L), \quad \forall\, v \in D(L^*),$$

il vient

$$(2.21)\qquad \| u'_\varepsilon \|_{D(L^*)'} = \| (u_\varepsilon - u_0)' \|_{D(L^*)'} \leqq \| u_\varepsilon - u_0 \|_{\mathfrak{B}} \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

Comme $D(L^*) \hookrightarrow \mathfrak{B}$ avec injection dense il vient $\mathfrak{B}' \hookrightarrow D(L^*)'$ et d'après (2. 20), (2. 21) et (2. 13) il s'ensuit

$$(2.22)\qquad \| \bar\beta\, u_\varepsilon \|_{D(L^*)'} \leqq c\, \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0;$$

mais, puisque $\| \bar\beta\, u_\varepsilon \|_{\mathfrak{B}'} \leqq c(1 + \| u_\varepsilon \|_{\mathfrak{B}}) \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, il s'ensuit finalement $\bar\beta\, u_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ dans $\mathfrak{B}'$ faible.

Alors il existe $u \in \mathfrak{E}$, $\chi \in \mathfrak{B}'$ et une sous-suite de u_ε encore notée u_ε tels que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$(2.23)\qquad \begin{cases} u_\varepsilon \to u & \text{dans } \mathfrak{B} \text{ faible,} \\ A u_\varepsilon \to \chi & \text{dans } \mathfrak{B}' \text{ faible,} \\ \bar\beta u_\varepsilon \to 0 & \text{dans } \mathfrak{B}' \text{ faible.} \end{cases}$$

Voyons maintenant que

$$(2.24)\qquad u \in \mathfrak{K}.$$

On a par (2. 13)

$$[\bar\beta\, u_\varepsilon, u_\varepsilon] = -\, \varepsilon([A u_\varepsilon, u_\varepsilon] + [u'_\varepsilon, u_\varepsilon])$$
$$= -\, \varepsilon\left([A u_\varepsilon, u_\varepsilon] + \frac{1}{2} \| u_\varepsilon(T) \|^2 - \frac{1}{2} \| u_0 \|^2\right) \Rightarrow \limsup_{\varepsilon\to 0}\, [\bar\beta\, u_\varepsilon, u_\varepsilon] \leqq 0,$$

et, d'après (2. 23), on a $\bar\beta\, u = 0$ car $\bar\beta$ est de type (M) (cf. [8] chap. 1, proposition 2. 5); donc $u \in \mathfrak{K}$.

Soit maintenant $w \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$; il vient de (2. 13) et (2. 8)

$$[u'_\varepsilon, w] = [-A u_\varepsilon, w],$$

ce qui donne, compte tenu de (2. 20),

$$(2.25)\qquad \| u'_\varepsilon \|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Alors par (2. 4) on peut supposer qu'on a

(2. 26) $$u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} u \quad \text{dans } L^{q,\bar{s}}(A) \text{ fort.}$$

D'autre part soit $v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K}$. Il vient de (2. 13), pour $0 \leqq \tau_0 < \tau \leqq T$.

$$\int_{\tau_0}^{\tau} (v' + Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)\, dt$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau} (u_\varepsilon' + Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon)\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau} (v' - u_\varepsilon', v - u_\varepsilon)\, dt$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{\tau} (\beta v - \beta u_\varepsilon, v - u_\varepsilon)\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau} (v' - u_\varepsilon', v - u_\varepsilon)\, dt \geqq \int_{\tau_0}^{\tau} (v' - u_\varepsilon', v - u_\varepsilon)\, dt$$

d'où

(2. 27) $$\int_{\tau_0}^{\tau} (v' + Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)\, dt \leqq -\frac{1}{2} (\| v(\tau) - u_\varepsilon(\tau) \|^2 - \| v(\tau_0) - u_\varepsilon(\tau_0) \|^2), \quad \forall\, v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K}, \forall\, 0 \leqq \tau_0 < \tau \leqq T.$$

En particulier on a, puisque $u_\varepsilon(0) = u_0$,

(2. 28) $$\int_0^{\tau} (v' + Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)\, dt \leqq 0, \ \forall\, v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K} \text{ tel que } v(0) = u_0, \ \forall\, \tau \in [0, T].$$

Puisqu'on a (2. 26) et $q > 2$ ont peut supposer que

(2. 29) $$u_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} u(t) \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ p. p. dans }]0, T[.$$

Prenons τ_0 dans l'ensemble où il a convergence; il vient de (2. 27) et (2. 23)

(2. 30) $$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau_0}^{\tau} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)\, dt \leqq \int_{\tau_0}^{\tau} (\chi, v)\, dt + \int_{\tau_0}^{\tau} (v', v - u)\, dt + \frac{1}{2} \| v(\tau_0) - u(\tau_0) \|^2,$$

$\forall\, v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K}$, p. p. en τ_0 et pour tout $\tau \in]\tau_0, T]$.

Prenons de nouveau les solutions des équations (1. 3), i. e. soient u_n donnés par

(2. 31) $$\frac{1}{n} u_n' + u_n = u, \qquad u_n(0) = u_0.$$

On a en particulier $u_n \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K}$, $u_n \underset{n \to \infty}{\to} u$ dans $\mathfrak{W}$ fort et $\int_{\tau_0}^{\tau} (u_n', u_n - u)\, dt \leqq 0$; on peut supposer que $u_n(t) \underset{n \to \infty}{\to} u(t)$ dans $L^2(\Omega)$, p. p. dans $]0, T[$. Alors en posant $v = u_n$ dans (2. 30) et en passant à la limite on arrive à

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau_0}^{\tau} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)\, dt \leqq \int_{\tau_0}^{\tau} (\chi, u)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau_0}^{\tau} (Au_\varepsilon, u)\, dt$$

d'où

(2. 23) $$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau_0}^{\tau} (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)\, dt \leqq 0, \text{ p. p. en } \tau_0, \text{ avec } 0 \leqq \tau_o < \tau \leqq T.$$

D'autre part, de (2. 28) il vient pour tout $\tau \in [0, T]$

$$\text{(2. 30')} \qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^\tau (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)\, dt \leqq \int_0^\tau (\chi, v)\, dt + \int_0^\tau (v', v - u)\, dt,$$

$\forall\, v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K}$ tel que $v(0) = u_0$, d'où en posant $v = u_n$ et en passant à la limite on obtient

$$\text{(2. 32')} \qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^\tau (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - u)\, dt \leqq 0, \forall\, \tau \in [0, T].$$

Maintenant d'après l'hypothèse (0. 30), et puisque (2. 19), (2. 23), (2. 26) et (2. 32) sont vérifiées, on obtient

$$\text{(2. 33)} \qquad \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\tau_0}^\tau (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)\, dt \geqq \int_{\tau_0}^\tau (Au, u - v)\, dt, \ \forall\, v \in \mathfrak{V},$$

p. p. en $\tau_0 (0 \leqq \tau_0 < \tau \leqq T)$. Alors, en passant à la limite dans (2. 27) quand $\varepsilon \to 0$, il s'ensuit, compte tenu de (2. 33) et (2. 29),

$$\text{(2. 34)} \qquad \int_{\tau_0}^\tau (v' + Au, u - v)\, dt \leqq -\frac{1}{2}(\| v(\tau) - u(\tau) \|^2 - \| v(\tau_0) - u(\tau_0) \|^2),$$

$\forall\, v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K}$, p. p. en τ_0, τ avec $0 \leqq \tau_0 < \tau \leqq T$.

En utilisant (2. 32') à la place de (2. 32) on obtient analoguement

$$\text{(2. 33')} \qquad \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_0^\tau (Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v)\, dt \geqq \int_0^\tau (Au, u - v)\, dt, \ \forall\, v \in \mathfrak{V}, \ \forall\, \tau \in [0, T],$$

et alors en passant à la limite dans (2. 27) (écrite pour $\tau_0 = 0$) on obtient

$$\text{(2. 34')} \qquad \int_0^\tau (v' + Au, u - v)\, dt \leqq -\frac{1}{2}(\| v(\tau) - u(\tau) \|^2 - \| v(0) - u_0 \|^2),$$

$\forall\, v \in \mathfrak{W} \cap \mathfrak{K}$, pour presque tous les $\tau \in [0, T]$.

Posons dans (2. 34') $v = u_n$. On en déduit

$$\| u_n(\tau) - u(\tau) \|^2 \leqq 2 \int_0^\tau (Au, u_n - u)\, dt + 2 \int_0^\tau (u_n', u_n - u)\, dt$$

$$\leqq 2\, \| Au \|_{\mathfrak{V}'}\, \| u_n - u \|_{\mathfrak{V}} \text{ p. p. en } \tau \in [0, T].$$

Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ dans $L^{2,\infty}(A)$ et, puisque $u_n \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ et $u_n(0) = u_0$, on a

$$\text{(2. 35)} \qquad u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)),\ u(0) = u_0,$$

et en outre l'inégalité (2. 34) est valable pour tous les τ_0, τ tels que $0 \leqq \tau_0 < \tau \leqq T$.

Ceci achève la démonstration de l'existence. L'unicité sous l'hypothèse (0. 33) est obtenue comme dans la démonstration du Théorème 6. 2 du chap. 3 de [8].

Remarques. (i) La démonstration du Théorème III est valable pour tout convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$ tel qu'il existe un opérateur de pénalisation β vérifiant (2. 7), (2. 8).

(ii) À la place de (0. 31) on aurait pu exiger seulement que, pour tout $\varepsilon > 0$ (petit),

$$\frac{\left[A v + \frac{1}{\varepsilon}\bar{\beta} v,\ v - u_0\right]}{\| v \|_{\mathfrak{V}}} \to +\infty \tag{2. 36}$$

quand $\| v \|_{\mathfrak{V}} \to \infty$, $v \in \mathfrak{E}$.

3. Apêndice

Dans ce paragraphe on démontrera le théorème suivant:

Théorème 3. 1. *Supposons vérifiées les conditions* (0. 11), (0. 14), (0. 24) *et* (0. 34). *Alors* (0. 30) *est valable.*

On démontrera ce résultat avec les méthodes de [7] (cf. aussi [8]). On commence par remarquer que, compte tenu de la structure de l'opérateur A, il suffit de démontrer (0. 30) pour $t_0 = 0$, $t_1 = T$.

Ceci étant, posons, avec $u \in \mathfrak{E}$, $v, w \in \mathfrak{V}$,

$$[A_1(u, v), w] = \sum_{i=1}^{N} \int_{A} B_i(x, t, u, \nabla v) D_i w \, dx\, dt, \tag{3. 1}$$

$$[A_2(u), w] = \int_{A} B_0(x, t, u, \nabla u) w \, dx\, dt, \tag{3. 2}$$

$$A(u, v) = A_1(u, v) + A_2(u). \tag{3. 3}$$

On a

$$A(u) = A(u, u) \tag{3. 4}$$

où $A : \mathfrak{E} \to \mathfrak{V}'$ est l'opérateur pour lequel nous voulons démontrer le Théorème 3. 1.

On a besoin de quelques lemmes préliminaires:

Lemme 3. 1. *Supposons vérifiées les hypothèses du Théorème* 3. 1. *Alors on a les deux propriétés suivantes*:

$$[A_1(u, u) - A_1(u, v), u - v] \geqq 0, \ \forall\, u \in \mathfrak{E}, \ \forall\, v \in \mathfrak{V}. \tag{3. 5}$$

Si

$$u_n, u \in \mathfrak{E}, \ \| u_n \|_{\mathfrak{E}} \leqq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}, \ u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ dans } L^{q,\bar{s}}(A) \text{ fort} \tag{3. 6}$$

et si, en outre,

$$[A_1(u_n, u_n) - A_1(u_n, u), u_n - u] \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

alors

$$B_0(x, t, u_n, \nabla u_n) \underset{n\to\infty}{\to} B_0(x, t, u, \nabla u) \text{ dans } L^{(2^*)',2}(A) \text{ faible.}$$

En particulier, $A_2(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} A_2(u)$ *dans* $\mathfrak{V}'$ *faible.*

Démonstration. La propriété (3. 5) est une conséquence immédiate de (0. 34). Posons

$$F_n(x, t) = \sum_{i=1}^{N} \left(B_i(x, t, u_n, \nabla u_n) - B_i(x, t, u_n, \nabla u)\right)(D_i u_n - D_i u). \tag{3. 7}$$

D'après les hypothèses faites on a

$$F_n(x, t) \geqq 0, \ \int_{A} F_n(x, t)\, dx\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3. 8}$$

Alors, comme $u_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ dans $L^{q,s}(\Lambda)$ fort on peut, de toute sous-suite u_ν de u_n, extraire une sous-suite encore notée u_ν telle que

$$(3.9) \qquad u_\nu(x,t) \underset{\nu\to\infty}{\to} u(x,t),\ F_\nu(x,t) \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$$

pour tout $(x,t) \in \Lambda_0$, avec mes $(\Lambda - \Lambda_0) = 0$.

On peut aussi supposer que b, f, e, h sont définies dans Λ_0. Fixons $(x,t) \in \Lambda_0$ et posons

$$y_\nu = u_\nu(x,t),\ y = u(x,t),\ z_\nu = \nabla u_\nu(x,t),\ z = \nabla u(x,t).$$

Démontrons que

$$(3.10) \qquad |z_\nu| \leqq \text{C}^{\text{te}} \text{ quand } \nu \to \infty.$$

En effet, on a d'après (0.11) et puisque les y_ν sont bornés:

$$(3.11) \qquad F_\nu(x,t) \geqq \sum_{i=1}^N B_i(x,t,y_\nu,z_\nu)z_{\nu,i} - \sum_{i=1}^N |B_i(x,t,y_\nu,z_\nu)|\,|z_i|$$
$$- \sum_{i=1}^N |B_i(x,t,y_\nu,z)|\,|z_{\nu,i}| - \sum_{i=1}^N |B_i(x,t,y_\nu,z)|\,|z_i| \geqq a|z_\nu|^2 - c(1+|z_\nu|).$$

Si (3.10) n'était pas vérifiée on aurait une sous-suite de z_ν, disons z_μ, telle que $|z_\mu| \underset{\mu\to\infty}{\to} +\infty$ et, d'après (3.11), on aurait $F_\mu(x,t) \underset{\mu\to\infty}{\to} +\infty$ ce qui est absurde par (3.9). Soit alors z^* la limite d'une sous-suite convergente de z_ν, disons z_μ. En passant à la limite dans (3.7) (avec μ à la place de n) quand $\mu\to\infty$ il vient d'après (3.9) et les propriétés des B_i,

$$0 = \sum_{i=1}^N \big(B_i(x,t,y,z^*) - B_i(x,t,y,z)\big)\cdot(z_i^* - z_i)$$

et donc $z^* = z$ et $z_\nu \underset{\nu\to\infty}{\to} z$.

Alors

$$(3.12) \qquad B_k\big(x,t,u_\nu(x,t),\nabla u_\nu(x,t)\big) \underset{\nu\to\infty}{\to} B_k\big(x,t,u(x,t),\nabla u(x,t)\big)$$

p. p. dans Λ pour $k = 0, 1, \ldots, N$. En outre, puisque $\| u_n \|_{\mathfrak{E}} \leqq \text{C}^{\text{te}}$,

$$(3.13) \qquad \begin{cases} \| B_i(x,t,u_n,\nabla u_n) \|_{2,2,\Lambda} \leqq \text{C}^{\text{te}}, \quad i = 1,\ldots,N, \\ \| B_0(x,t,u_n,\nabla u_n) \|_{(2^*)',2,\Lambda} \leqq \text{C}^{\text{te}}. \end{cases}$$

Alors le lemme 1.3 du chap. I de [8] (adapté dans le cas de B_0) entraîne, compte tenu de (3.12) et (3.13), qu'on a

$$B_0(x,t,u_n,\nabla u_n) \underset{n\to\infty}{\to} B_0(x,t,u,\nabla u)$$

dans $L^{(2^*)',2}(\Lambda)$ faible (et aussi qu'on a

$$B_i(x,t,u_n,\nabla u_n) \underset{n\to\infty}{\to} B_i(x,t,u,\nabla u),\ i = 1,\ldots,N,$$

dans $L^2(\Lambda)$ faible).

Lemme 3.2. *Si $u_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ dans $L^{q,\bar{s}}(\Lambda)$ fort alors*

$$B_i\big(x,t,u_n(x,t),\nabla v(x,t)\big) \underset{n\to\infty}{\to} B_i\big(x,t,u(x,t),\nabla v(x,t)\big)$$

$(1 \leqq i \leqq N)$ dans $L^2(\Lambda)$ fort pour chaque $v \in \mathfrak{V}$.

Démonstration. Pour tout $w(x, t) \in L^{q,\bar{s}}(\Lambda)$ on a, d'après (0. 11) et (0. 14),

$$B_i(x, t, w(x, t), \nabla v(x, t)) \in L^2(\Lambda).$$

Alors le lemme est une conséquence du Théorème 2. 1 de [5]. Remarquons que ce théorème est encore valable avec $L^{q,\bar{s}}$ à la place de L^{p_1} (et $p_2 = 2$ dans notre cas). On doit seulement substituer (2. 4) de [5] par $\sum_{n=1}^{\infty} \| \varphi_n \|_{q,\bar{s},\Lambda} < +\infty$, ce qui est loisible.

Lemme 3. 3. *Supposons vérifiées les hypothèses du Théorème* 3. 1. *Alors, si* $u_n, u \in \mathfrak{E}$, $\| u_n \|_{\mathfrak{E}} \leqq C^{te}$, $u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} u$ *dans* $\mathfrak{V}$ *faible et dans* $L^{q,\bar{s}}(\Lambda)$ *fort et*

$$[A(u_n, u_n) - A(u_n, u),\ u_n - u] \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \tag{3. 14}$$

on a

$$A(u_n, v) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} A(u, v) \text{ dans } \mathfrak{V}' \text{ faible}, \ \forall\, v \in \mathfrak{V}. \tag{3. 15}$$

Démonstration. On a, d'après (3. 14),

$$[A_1(u_n, u_n) - A_1(u_n, u),\ u_n - u] \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

D'autre part, par (3. 6), on a

$$A_2(u_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} A_2(u) \text{ dans } \mathfrak{V}' \text{ faible.} \tag{3. 16}$$

En outre, par le lemme 3. 2, on a, $\forall\, v \in \mathfrak{V}$,

$$A_1(u_n, v) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} A_1(u, v) \text{ dans } \mathfrak{V}' \text{ fort.} \tag{3. 17}$$

Alors (3. 16) et (3. 17) entraînent (3. 15).

Lemme 3. 4. *Supposons vérifiées les hypothèses du Théorème* 3. 1. *Alors, si*

$$u_n, u \in \mathfrak{E},\ \| u_n \|_{\mathfrak{E}} \leqq C^{te},\ u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} u$$

dans $\mathfrak{V}$ *faible et dans* $L^{q,\bar{s}}(\Lambda)$ *fort et*

$$A(u_n, v) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \Psi \text{ dans } \mathfrak{V}' \text{ faible, avec } v \in \mathfrak{V}, \tag{3. 18}$$

on a

$$[A(u_n, v), u_n] \underset{n\to\infty}{\rightarrow} [\Psi, u]. \tag{3. 19}$$

Démonstration. Par le lemme 3. 2, $A_1(u_n, v) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} A_1(u, v)$ dans $\mathfrak{V}'$ fort et donc on a

$$[A_1(u_n, v), u_n] \underset{n\to\infty}{\rightarrow} [A_1(u, v), u]. \tag{3. 20}$$

En outre,

$$A_2(u_n) = A(u_n, v) - A_1(u_n, v) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \Psi - A_1(u, v), \tag{3. 21}$$

dans $\mathfrak{V}'$ faible. Finalement, puisqu'on a

$$\| u_n \|_{q,\bar{s},\Lambda} \leqq C^{te},\ \| \nabla u_n \|_{2,2,\Lambda} \leqq C^{te},$$

il vient, de (0. 11) et (0. 14), que

$$\| B_0(x, t, u_n, \nabla u_n) \|_{q',(\bar{s})',\Lambda} \leqq C^{te}$$

et donc

$$(3.22) \qquad [A_2(u_n), u_n - u] \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

puisque $u_n \underset{n\to\infty}{\to} u$ dans $L^{q,\bar{s}}(A)$ fort.

Alors de

$$[A(u_n, v), u_n] = [A_1(u_n, v), u_n] + [A_2(u_n), u] + [A_2(u_n), u_n - u],$$

on obtient (3. 19), compte tenu de (3. 20), (3. 21) et (3. 22).

Ces lemmes étant établis on passe à la

Démonstration du Théorème 3. 1. On commence par démontrer que de chaque sous-suite u_k de u_n on peut extraire une sous-suite encore notée u_k telle que

$$(3.23) \qquad X_k = [A(u_k, u_k) - A(u_k, u), u_k - u] \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

En effet, puisque $\| u_n \|_{\mathfrak{C}} \leqq \mathrm{C}^{te}$ il vient que

$$\| A(u_n, u) \|_{\mathfrak{B}'} \leqq \mathrm{C}^{te}.$$

Donc, de chaque sous-suite u_k de u_n, on peut extraire une sous-suite encore notée u_k telle que $A(u_k, u) \underset{k\to\infty}{\to} \Psi \in \mathfrak{B}'$ dans $\mathfrak{B}'$ faible. Alors le lemme 3. 4 entraîne

$$[A(u_k, u), u_k] \underset{k\to\infty}{\to} [\Psi, u]$$

et donc $[A(u_k, u), u_k - u] \underset{k\to\infty}{\to} 0$ ce qui donne, compte tenu de (0. 30), (iii),

$$\limsup_k X_k \leqq 0.$$

D'autre part, on a $X_k \geqq 0$ par (3. 5). Donc, on a (3. 23). Alors, par le lemme 3. 3, il vient

$$(3.24) \qquad A(u_k, v) \underset{k\to\infty}{\to} A(u, v) \text{ dans } \mathfrak{B}' \text{ faible}, \ \forall\, v \in \mathfrak{B}.$$

Ceci entraîne, par le lemme 3. 4,

$$[A(u_k, v), u_k] \underset{k\to\infty}{\to} [A(u, v), u], \ \forall\, v \in \mathfrak{B},$$

et donc, compte tenu de (3. 24), on obtient

$$(3.25) \qquad [A(u_k, v), u_k - u] \underset{k\to\infty}{\to} 0, \ \forall\, v \in \mathfrak{B}.$$

On a

$$[A(u_k), u_k - u] \geqq [A(u_k, u), u_k - u] \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

par (3. 25) ce qui donne avec l'hypothèse (0. 30), (iii),

$$(3.26) \qquad [A(u_k), u_k - u] \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

En utilisant $[A(u_k) - A(u_k, w), u_k - w] \geqq 0$ avec $w = (1 - \theta)\, u + \theta v$, $\theta \in]0, 1[$, on obtient

$$\theta[A(u_k), u - v] \geqq -[A(u_k), u_k - u] + [A(u_k, w), u_k - u] + \theta[A(u_k, w), u - v],$$

ce qui entraîne, par (3. 26), (3. 25) et (3. 24),

$$\theta \liminf_k [A(u_k), u - v] \geqq \theta[A(u, w), u - v].$$

En divisant par θ on en déduit, par (3. 26),

$$\liminf_k \,[A(u_k),\, u_k - v] \geqq [A(u, w),\, u - v]. \tag{3. 27}$$

Puisque l'application $v \to A(u, v)$ est (comme il est facile de vérifier) hémi-continue de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}'(\forall\, u \in \mathfrak{E})$ en faisant θ tendre vers 0 dans (3. 27) il s'ensuit

$$\liminf_k \,[A u_k,\, u_k - v] \geqq [A u,\, u - v],\ \forall\, v \in \mathfrak{V},$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 3. 1.

Bibliographie

[1] *D. G. Aronson* and *J. Serrin*, Local behavior of solutions of quasi-linear parabolic equations. Arch. Rat. Mech. Anal. **25** (1967), 81—122.

[2] *J. P. Aubin*, Un théorème de compacité. C. R. Acad. Sci. Paris, série A, **256** (1963), 5042—5044.

[3] *H. Beirão da Veiga* et *J. P. Dias*, Régularité des solutions d'une équation parabolique non linéaire avec des contraintes unilatérales sur la frontière. Ann. Inst. Fourier **22** (1972), 161—192.

[4] *H. Brézis*, Perturbations non linéaires d'opérateurs maximaux monotones. C. R. Acad. Sci. Paris, série A, **269** (1969), 566—569.

[5] *M. A. Krasnosel'kii*, Topological methods in the theory of non linear integral equations, Pergamon 1964.

[6] *O. A. Ladyženskaja*, *V. A. Solonnikov* and *N. N. Ural'ceva*, Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Transl. Math. Monographs, Am. Math. Soc. (1968).

[7] *J. Leray* et *J. L. Lions*, Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97—107.

[8] *J. L. Lions*, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris 1969.

[9] *K. Yosida*, Functional Analysis. Berlin-Heidelberg-New York 1968.

Instituto de Física e Matemática, Av. Gama Pinto, 2, Lisboa-4 (Portugal)

Eingegangen 29. April 1972