HBU-71

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 405-408, 1995

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Concerning the regularity problem for the solutions of the Navier-Stokes equations

Hugo BEIRÃO DA VEIGA

Abstract – We extend, in a very natural way, the classical Prodi-Serrin's sufficient condition concerning the regularity of the solutions to the non-stationary Navier-Stokes equations.

Sur le problème de la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes

Résumé – *On étend, d'une façon très naturelle, la condition suffisante classique de Prodi et Serrin concernant la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes non stationnaires.*

Version française abrégée – Dans l'article [1], qui sera publié prochainement, on considère le problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^n \times (0,\ T)$, $n \geqq 3$,

$$(1)\qquad \begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)\, v - \Delta v = \nabla \pi, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(x,\ 0) = v_0(x). \end{cases}$$

Pour simplifier cette exposition on va supposer que le fluide n'est pas soumis à l'action de forces extérieures. Autrement les démonstrations se généralisent sans aucune difficulté. Nous allons considérer (dans le cadre des espaces de Sobolev), le problème classique de la recherche de conditions suffisantes pour l'existence d'une solution (unique) régulière.

Si $\gamma \in [1 + \infty]$ on pose $L^\gamma = L^\gamma(\mathbb{R}^n)$ et on désigne par $\|\cdot\|_\gamma$ la norme canonique dans cet espace. Nous utiliserons les mêmes symboles pour indiquer des espaces de fonctions scalaires et de fonctions vectorielles. Cette convention s'applique aussi à d'autres symboles, par exemple aux normes. Pour simplifier, on désigne ici par $W^{1,\beta}$ le complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la norme $\|Dv\|_\beta$, où $|Dv|^2 = \sum_{i,j} |\partial_i v_j|^2$.

Beaucoup d'auteurs ont démontré l'unicité et la régularité des solutions v des équations de Navier-Stokes dans l'hypothèse où v appartienne à un espace $L^\alpha(0,\ T;\ L^\gamma)$, avec

$$(2)\qquad \frac{2}{\alpha} + \frac{n}{\gamma} = 1.$$

Voir, par exemple, les articles classiques [8] et [10] (pour $n = 2$, [7], [5], [9]); consulter aussi [5], [6], et les articles plus récents [2], [3], [4], [11], [13] et [12]. Nous nous sommes intéressés à obtenir des résultats dans ce même esprit.

Pour éviter des artifices, ici tout à fait secondaires, nous avons placé notre résultat dans le cadre classique des solutions selon Leray et Hopf. On suppose alors que la donnée initiale appartient à l'espace L^2.

Soient α et β deux réels, avec $1 < \alpha \leqq \min\{2,\ n/(n-2)\}$, tels que

$$(3)\qquad \frac{2}{\alpha} + \frac{n}{\beta} = 2.$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/95/03210405 $ 2.00

Dans l'article [1] on démontre le résultat suivant :

THÉORÈME. – *Soit* $v_0 \in L^2$, *avec* div $v_0 = 0$. *Supposons en outre que* $Dv_0 \in L^{\alpha'}$. *Soit* v *une solution selon Leray et Hopf du problème* (1) *dans* $[0, T)$. *Si*

$$Dv \in L^\alpha(0, T; L^\beta) \tag{4}$$

alors

$$Dv \in C(0, T; L^{\alpha'}) \cap L^{\alpha'}(0, T; L^{2^* \alpha'/2}). \tag{5}$$

En particulier v *est une solution régulière. De plus,*

$$\sup_{0 \leq t < T} \|Dv(t)\|_{\alpha'}^{\alpha'} + \int_0^T \|Dv(t)\|_{2^* \alpha'/2}^{\alpha'} dt \leq c \|Dv(0)\|_{\alpha'}^{\alpha'} \left[1 + \exp\left(c \int_0^T \|Dv(t)\|_\beta^\alpha dt\right)\right]. \tag{6}$$

Dans la condition suffisante classique (2) on a nécessairement $\alpha \geqq 2$. Par contre notre résultat, établi pour $\alpha \leqq 2$, reste encore valable si $\alpha > 2$. Mais dans ce dernier cas il est un corollaire immédiat du théorème classique puisque, étant donné que $\beta < n$, le théorème d'immersion de Sobolev montre que $v \in L^\alpha(0, T; L^{\beta^*})$, avec $\beta^* = n\beta/(n-\beta)$. Il s'ensuit que l'hypothèse classique est satisfaite, car $(2/\alpha) + (n/\beta^*) = 1$. Donc notre théorème est l'extension naturelle du résultat classique au cas $\alpha < 2$. Pour $\alpha = 2$ la condition suffisante classique devient $v \in L^2(0, T; L^\infty)$. Par conséquent il est tout à fait naturel, dans le cadre des espaces de Sobolev entiers, d'exiger [*voir* (4)] que $v \in L^\alpha(0, T; W^{1,\beta})$, si $\alpha < 2$. De plus, β doit être tel que $\beta = n$ si $\alpha = 2$ (car $W^{1,n}$ « correspond » à L^∞). En effet, si $\alpha = 2$ la condition (3) donne exactement $\beta = n$. Le cas $\alpha = 2$ (commun aux deux théorèmes) est particulièrement éclairant. Ici, contrairement au cas $\alpha > 2$, notre résultat n'est pas contenu dans le résultat classique non plus. En effet il établit (si $n \leqq 4$) que l'espace $L^2(0, T; W^{1,n})$ est un espace de régularité. Ce résultat n'est pas une conséquence du théorème classique puisque l'inclusion $W^{1,n} \hookrightarrow L^\infty$ est fausse. Ce résultat nous semble particulièrement simple et significatif. Notons à ce propos que selon l'hypothèse (4) [avec (3)] la quantité $2/\alpha + n/\gamma$ (qui est la mesure de la régularité de la solution selon le résultat classique) vaut 1 pour tout $\alpha > 2$, car $\gamma = \beta^*$. Par contre, si $\alpha = 2$, elle devient plus grande, que 1 (mais arbitrairement voisine de 1, car $W^{1,n} \hookrightarrow L^p$, $\forall p < +\infty$), donc le théorème classique ne s'applique plus. Si $\alpha \in (1, 2)$ la valeur $2/\alpha + n/\gamma$ s'éloigne de plus en plus de la valeur optimale 1 au fur et à mesure que α devient petit (car $\gamma = +\infty$ si $\beta > n$). En effet l'indice significatif est ici $2/\alpha + n/\beta^*$, que Sobolev soit valable ou non. Nous croyons que les résultats s'étendent facilement aux espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,\beta}$, avec $\beta^* = n\beta/(n - \beta s)$.

Remarquons que dans l'hypothèse (4) on peut remplacer Dv par rot v. Finalement, il est curieux de constater que pour $\alpha = 1$ on trouve la classe $L^1(o, T; W^{1,\infty})$, qui est une classe de régularité pour les équations d'Euler des fluides non-visqueux. Plus précisément elle est la seule, parmi les classes (4) avec (3), à posséder cette propriété (dans l'état actuel des connaissances).

In the forthcoming paper [1] we shall consider the initial value problem for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n \times (0,\, T)$, $n \geqq 3$,

$$\begin{cases} \partial_t\, v + (v \cdot \nabla)\, v - \Delta v = \nabla\, \pi, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v\,(x,\, 0) = v_0\,(x). \end{cases} \tag{1}$$

We assume, for the sake of simplicity, that the external forces vanish, although it is an easy exercice to include non-zero external forces. We are interested in the classical problem of finding, within the framework of Sobolev spaces, sufficient conditions for the existence of a regular (unique) solution.

If $\gamma \in [1 + \infty]$ we denote the space $L^\gamma\,(\mathbb{R}^n)$ simply by L^γ and the canonical norm in this space by $\|\cdot\|_\gamma$. We use the same symbol to denote functional spaces consisting of scalar functions or consisting of vector functions. For instance, we denote the space $L^\gamma \times \cdots \times L^\gamma$ (n times) simply by L^γ. This convention also applies to other symbols as, for instance, norms. For convenience we denote here by $W^{1,\beta}$ the completion of $C_0^\infty\,(\mathbb{R}^n)$ with respect to the norm $\|Dv\|_\beta$, where $|Dv|^2 = \sum_{i,j} |\partial_i\, v_j|^2$.

Many authors have proved that uniqueness and regularity for solutions of the Navier-Stokes equations hold under the assumption that v belongs to $L^\alpha\,(0,\, T;\; L^\gamma)$, where

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{n}{\gamma} = 1. \tag{2}$$

See, for instance, the classical references [8] and [10] (for n=2, [7], [5], [9]); *see* also [5], [6], and the more recent developments in [2], [3], [4], [11], [13] and [12]. We are interested in obtaining results in this same spirit. For the sake of convenience, we consider Leray-Hopf solutions. In particular, we assume that the initial data belongs to L^2. However, these assumptions are not necessary at all.

Let $1 < \alpha \leqq \min\,\{2,\, n/(n-2)\}$,, and define β by

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{n}{\beta} = 2. \tag{3}$$

In reference [1] we prove the following result:

THEOREM. – *Let* $v_0 \in L^2$, *and assume, moreover, that* $\operatorname{div} v_0 = 0$ *and that* $Dv_0 \in L^{\alpha'}$. *Let* v *be a Leray-Hopf solution of problem* (1) *in* $[0,\, T)$. *If*

$$Dv \in L^\alpha\,(0,\, T;\; L^\beta) \tag{4}$$

then

$$Dv \in C\,(0,\, T;\; L^{\alpha'}) \cap L^{\alpha'}\,(0,\, T;\; L^{2^*\alpha'/2}). \tag{5}$$

In particular v *is a regular solution. Moreover,*

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leqq t < T} \|Dv\,(t)\|_{\alpha'}^{\alpha'} + \int_0^T \|Dv\,(t)\|_{2^*\alpha'/2}^{\alpha'}\, dt \\ &\qquad \leqq c \|Dv\,(0)\|_{\alpha'}^{\alpha'} \left[1 + \exp\left(c \int_0^T \|Dv\,(t)\|_\beta^\alpha\, dt\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Let us show that this theorem is the natural extension of the classical result to values $\alpha \leqq 2$. In the classical result $\alpha \geqq 2$ and $\gamma \leqq n$. In our theorem, $\alpha \leqq 2$ and $\beta \geqq n$. Nevertheless, in order to compare it with the classical result, let us overlap both situations by assuming $\alpha \geqq 2$ in our theorem. (In fact, our theorem holds also for $\alpha \geqq 2$). Since $\beta < n$, the Sobolev embedding theorem $W^{1,\beta} \hookrightarrow L^{\beta^*}$ holds, where $\beta^* = n\,\beta/(n-\beta)$. Consequently, our assumption (4) yields (exactly) $v \in L^\alpha(0,\ T;\ L^{\beta^*})$. But this is simply the classical assumption, since the pair $(\alpha,\ \beta^*)$ satisfies (2). This argument shows that our result is just the natural extension of the classical one to values $\alpha \leqq 2$. In this last case, the loss of regularity in time turns out to be balanced by some additional regularity in space. Note that in the classical theorem the regularity in space, L^γ, reaches its maximum $\gamma = \infty$ for $\alpha = 2$. Hence, if $\alpha \leqq 2$, one has to go beyond L^∞. In our Sobolev spaces framework, this means starting to use $W^{1,\beta}$ spaces. For $\alpha = 2$ (common to both theorems) our condition (3) gives $\beta = n$. It is worth noting that this borderline case is particularly interesting. Indeed, our result shows that (if $n \leqq 4$) $L^2(0,\ T;\ W^{1,n})$ is a regularity class. This does not follow from the classical result, that states that $L^2(0,\ T;\ L^\infty)$ is a regularity class (since $W^{1,n} \hookrightarrow L^\infty$ is false).

Next, assume that $\alpha \in (1,\ 2)$. Then, the value of the classical index $2/\alpha + \gamma/n$, when applied to our regularity class $L^\alpha(0,\ T;\ W^{1,\beta})$, is $2/\alpha$, since $\gamma = \infty$. Since this value is larger than 1, the classical theorem does not apply. Our result shows that the significant index is $2/\alpha + n/\beta^*$, where β^* is equal to $n\,\beta/(n-\beta)$, independently of the fact that the Sobolev's embedding theorem $W^{1,n} \hookrightarrow L^{\beta^*}$ holds or does not hold. We believe that our theorem may be extended to the case $W^{s,\beta}$, s non-negative real. In this case $\beta^* = n\,\beta/(n-\beta\,s)$. However, this extension looks less interesting.

Curiously enough, for $\alpha = 1$ one gets $L^1(0,\ T;\ W^{1,\infty})$, which is known to be a regularity class for the Euler equations (inviscid fluids). Actually, it is the only, among the above classes (4), to be a regularity class for the Euler equations (as present knowledge stands). Note that, in assumption (4), Dv can be replaced by curl v.

Note remise le 29 mai 1995, acceptée le 12 juin 1995.

REFERENCES

[1] H. Beirão da Veiga, An extension of the classical Prodi-Serrin's sufficient condition concerning the Navier-Stokes equations, *Chinese Ann. of Math., Serie B*, 16, 1995.

[2] E. B. Fabes, B. F. Jones and N. M. Rivière, The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 45, 1972, pp. 222-240.

[3] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system, *J. Differential Equations*, 62, 1986, pp. 186-212.

[4] T. Kato, Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions, *Math. Z.*, 187, 1984, pp. 471-480.

[5] O. A. Ladyzenskaya, *La théorie mathématique des fluides visqueux incompressibles*, Moscou, 1961, English trans., Gordon and Breach, New York, 2nd Ed., 1969.

[6] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[7] J. L. Lions and G. Prodi, Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248, 1959, pp. 3519-3521.

[8] G. Prodi, Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes, *Ann. di Mat.*, 48, 1959, pp. 173-182.

[9] G. Prodi, Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale, *Rend. Sem. Mat. Padova*, 30, 1960, pp. 1-15.

[10] J. Serrin, The initial value problem for the Navier-Stokes equations, In: *Non-linear problems*, Univ. Wisconsin Press, R. E. Langer Ed., 1963, pp. 69-98.

[11] H. Sohr, Zur regularitätstheorie der instationären Gleichungen von Navier-Stokes, *Math. Z.*, 184, 1983, pp. 359-375.

[12] H. Sohr and W. von Wahl, On the singular set and the uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Manuscripta Math.*, 49, 1984, pp. 27-59.

[13] W. von Wahl, Nichtlineare Evolutions gleichungen, *Teubner-Texte zur Math.*, 50, pp. 294-302, Leipzig, Teubner, 1983.

Università di Pisa, Dip. di Mat., Via F. Buonarroti, 2-56127 Pisa, Italie.