HBV-6

Estratto da « Ricerche di Matematica » vol. XXI (1972)

Punti regolari per una classe di operatori ellittici non lineari

Nota di HUGO BEIRÃO DA VEIGA (a Roma) (*)

Summary – In this paper we studied regular boundary points for Dirichlet's problem with respect to non-linear elliptic second order equations in divergence form.

INTRODUZIONE – Considereremo in questo lavoro l'operatore differenziale

$$\mathrm{L}\, u \equiv \operatorname{div} \mathrm{A}\, (\nabla u) \tag{0.1}$$

ove $\mathrm{A}\,(p)$ è un'applicazione continua di $\mathbf{R}^N$ in sè, u una funzione reale definita su un aperto di $\mathbf{R}^N$ e ∇u il suo gradiente. Faremo sull'applicazlone $\mathrm{A}\,(p)$ le seguenti ipotesi:

$$\mathrm{A}\,(0) = 0\,, \tag{0.2}$$

$$(\mathrm{A}\,(p) - \mathrm{A}\,(q)) \cdot (p - q) > 0 \qquad \text{se} \quad p \neq q\,, \tag{0.3}$$

$$\mathrm{A}\,(p) \cdot p \geqq a\, |\, p\,|^t \qquad \text{se} \qquad |\, p\,| \geqq p_0\,, \tag{0.4}$$

$$|\, \mathrm{A}\,(p)\,| \leqq a^{-1}\, |\, p\,|^{t-1} \qquad \text{se} \qquad |\, p\,| \geqq p_0\,; \tag{0.5}$$

$a > 0$, $p_0 \geqq 0$ e $t > 1$ sono costanti. Con $|\, x\,|$ e $x \cdot y$ indichiamo rispettivamente la norma ed il prodotto scalare in $\mathbf{R}^N$.

Supponiamo note al lettore le definizioni degli spazi di funzioni che useremo in questo lavoro; precisiamo comunque che $\mathrm{H}^{1,t}(\Omega)$ viene definito come completamento di $\mathrm{C}^1(\bar{\Omega})$ (o equivalentemente di $\mathrm{Lip}\,(\bar{\Omega})$) rispetto alla

(*) Borsista dello « Instituto de Alta Cültura » (Portogallo).

norma $\| v \|_{1,t} = \| v \|_t + \| \nabla v \|_t$. Per semplicità scriveremo $\| \nabla v \|_t$ invece di $\| \, | v | \, \|_t$.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$ di frontiera $\partial \Omega$ e consideriamo il problema di Dirichlet

$$(0.6) \qquad \begin{cases} L u = 0 & \text{su } \Omega \quad , \\ u = \varphi & \text{su } \partial \Omega \quad , \end{cases}$$

con $\varphi \in C^0 (\partial \Omega)$; tale problema ammette (cfr. teor. 2.4) una ed una sola soluzione $u \in H^{1,t}_{loc} (\Omega) \cap C^0 (\Omega)$. La soluzione u va intesa nel senso debole dato che $A (p)$ si suppone soltanto continua. Diremo che un punto $y \in \partial \Omega$ è *regolare*, relativamente a Ω e L, se per ogni $\varphi \in C^0 (\partial \Omega)$ la soluzione $u (x)$ di (0.6) soddisfa la condizione

$$(0.7) \qquad \lim_{x \to y} u (x) = \varphi (y).$$

Per l'operatore di Laplace (cioè $A (p) = p$) tali punti sono stati caratterizzati da Wiener; cfr. Wiener [14], [15] Frostman [5]. Per operatori lineari a coefficienti discontinui (cioè $A_i (p) = \sum_j a_{ij} (x) \, p_j$ con $\sum_{i,j} a_{ij} (x) \xi_i \xi_j \geqq \nu \, | \xi |^2$, $\nu > 0$, $a_{ij} \in L^\infty (\Omega)$ e $i, j = 1, \ldots, N$) una tale caratterizzazione è stata data da Littman, Stampacchia e Weinberger in [9].

Nei numeri seguenti daremo delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè un punto di frontiera sia regolare relativamente all'operatore definito in (0.1) in termini d'un opportuno potenziale capacitario; allo scopo di illustrare i risultati ottenuti occorrono delle definizioni e dei risultati che ora esponiamo.

Dato $y \in \mathbf{R}^N$ e $\rho > 0$ indicheremo con $I (y, \rho)$ la sfera aperta di centro y e raggio ρ; se $A \subset \mathbf{R}^N$ porremo $A (y, \rho) = A \cap I (y, \rho)$. Finalmente $\complement A$ e $\overline{A}$ indicano rispettivamente il complementare e la chiusura di A.

Posto $V = H^{1,t} (\Omega)$, consideriamo la forma

$$(0.8) \qquad a (v, \psi) = \int_\Omega A (\nabla v) \cdot \nabla \psi \quad dx$$

definita su $V \times V$ oppure su $H^{1,t}_{loc} (\Omega) \times \mathfrak{D} (\Omega)$. Diremo che v è una *soprasoluzione* [risp. una *sottosoluzione*] in Ω rispetto all'operatore L se

$$(0.9) \qquad a (v, \psi) \geqq 0 \qquad \forall \, \psi \in \mathfrak{D} (\Omega) , \qquad \psi \geqq 0 \qquad [\text{risp. } \psi \leqq 0] .$$

Ovviamente se $v \in V$, $\mathfrak{D} (\Omega)$ può essere sostituito con $V_0 = H_0^{1,t} (\Omega)$.

Definizione 0.1 — *Diremo che in un punto $y \in \partial\Omega$ esiste un sistema di barriere relativamente a* L *se dati due numeri positivi arbitrari ρ e m esistono in Ω una soprasoluzione $V \geqq 0$ ed una sottosoluzione $U \leqq 0$ appartenenti a $H^{1,t}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ tali che*

(i) $V \geqq m$ e $U \leqq -m$ su $\partial\Omega \cap C\,I(y, \rho)$ (1),

(ii) $\lim\limits_{x \to y} V(x) = \lim\limits_{x \to y} U(x) = 0.$

La definizione 0.1 generalizza la nozione di barriera secondo Perron; cfr. Courant - Hilbert [2], pp. 306 - 312 e 341.

Nel numero 3 dimostreremo il seguente risultato:

Teorema A — *Il punto $y \in \partial\Omega$ è regolare se e solo se esite in y un sistema di barriere.*

Allo scopo d'enunciare un altro criterio di regolarità premettiamo ancora qualche osservazione e qualche definizione; siano $m > 0$, $\varphi \in V$ ed $E \subset \Omega$ un insieme chiuso, e consideriamo i seguenti convessi chiusi di V:

$$V_\varphi = \{ v \in V : v - \varphi \in V_0 \} \quad \text{con } \varphi \in V, \tag{0.10}$$

$$K_m = \{ v \in V_0 : v \geqq m \text{ su } E \} \quad (2), \tag{0.11}$$

$$K_{-m} = - K_m = \{ v \in V_0 : v \leqq -m \text{ su } E \}. \tag{0.11'}$$

Si verifica facilmente che: (i) $a(v, v - u) - a(u, v - u) \geqq 0$ per ogni coppia $u, v \in V$ (monotonia) (ii) $a(u + t\,v, w)$ è una funzione continua della variabile reale t per ogni terna $u, v, w \in V$ (emicontinuità) (iii) $a(v, v - u) - a(u, v - u) = 0$ implica $\nabla u = \nabla v$ su Ω; se inoltre $u - v \in V_0$ allora $u = v$ (iv) per $v \in V_\varphi$, $v \in K_m$ oppore $v \in K_{-m}$ si ha (coercività)

$$\lim_{\|v\|_{1,t} \to +\infty} \frac{a(v, v)}{\|v\|_{1,t}} = +\infty. \tag{0.12}$$

Dalle proprietà (i), (ii), (iii) e (iv) e da noti teoremi generali (cfr. Hartman - Stampacchia [6] (3)) segue l'esistenza e l'unicità delle soluzioni dei tre

(1) $V \geqq m$ ed $U \leqq -m$ nel senso introdotto da Stampacchia; cfr. ad esempio [12], definizione 1.1.

(2) $v \geqq m$ nel senso riferito nella nota (1).

(3) cfr. anche Lions [8] teoremi 8.2 e 8.3.

6

seguenti problemi di equazioni e di disequazioni variazionali

$$(0.13) \qquad u_1 \in V_\varphi\ , \qquad a(u_1, v) = 0 \qquad \forall\, v \in V_0\ ;$$

$$(0.14) \qquad u_2 \in K_m\ , \qquad a(u_2, v - u_2) \geqq 0 \qquad \forall\, v \in K_m\ ;$$

$$(0.15) \qquad u_3 \in K_{-m}, \qquad a(u_3, v - u_3) \geqq 0 \qquad \forall\, v \in K_{-m}.$$

Ciò posto, introdurremo la

DEFINIZIONE 0.2 — *Dati un reale positivo m, un sottoinsieme chiuso* E *di* $\mathbf{R}^N$ *ed una sfera aperta* $\Sigma \supset E$, *chiameremo potenziali capacitari di* E (*relativi rispettivamente ai valori* m *e* $-m$) *le soluzioni di* (0.14) e (0.15) *ove si consideri* $\Omega = \Sigma$.

I potenziali capacitari introdotti si ricollegano alla nozione di capacità adoperata da Serrin in [11].

Dato ora l' aperto limitato Ω fissiamo una sfera aperta Σ tale che $\Sigma \supset \supset \Omega$ (i. e. $\Sigma \supset \overline{\Omega}$); per ogni coppia y, ρ con $y \in \partial\Omega$ e $0 < \rho <$ $<$ dist $(\Omega, \partial\Sigma)$ porremo $E_\rho = (\complement\, \Omega) \cap \overline{I(y, \rho)}$. Indicheremo con $u_{m,\rho}$ e $u_{-m,\rho}$ i potenziali capacitari degli insiemi E_ρ relativi ai valori m e $-m$. Nel numero 4 dimostreremo il seguente risultato:

TEOREMA B — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto* $y \in \partial\Omega$ *sia regolare è che*

$$(0.16) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to y} u_{m,\rho}(x) = m\ , \\ \lim\limits_{x \to y} u_{-m,\rho}(x) = -\, m\ , \end{cases}$$

per ogni coppia di numeri positivi ρ e m (o equivalentemente: per una successione (ρ_n, m_n) soddisfacente $(\rho_n, m_n) \longrightarrow (0, +\infty)$).

COROLLARIO C — *Ogni punto di frontiera è regolare rispetto allo operatore* (0.1), *se* $t > N$.

Il corollario è una conseguenza del teorema B e della immersione di $H^{1,t}(\Sigma)$ in $C^{0,1-N/t}(\overline{\Sigma})$.

Il teorema B insieme ad altri risultati permette di dimostrare il seguente criterio sufficiente nel caso $t < N$ (cfr. Conti - da Veiga [1]):

Teorema — *Condizione sufficiente affinchè $y \in \partial\Omega$ sia regolare rispetto all'operatore* L *è che* y *verifichi la proprietà di cono esterno* (N − 1) - *dimensionale* (4).

Sia ora $\sigma(\rho)$ la densità rispetto alla misura di Lebesgue dello insieme $\complement\,\Omega$ nel punto y i. e. $\sigma(\rho) = |\complement\,\Omega(y, \rho)| / |I(y, \rho)|$, ove $|A|$ indica in generale la misura di Lebesgue dell'insieme A. Si dimostra che « esiste una costante positiva c_0 tale che $y \in \partial\Omega$ è regolare sempre che si abbia $[\sigma(\rho)]^{t/(t-1)} \geqq c_0 (\log\log \rho^{-1})^{-1}$, per ogni ρ positivo in un intorno dello zero ». 1-1

Con c, c_0, c_1 ecc., indichiamo delle costanti dipendenti al più da t, N, a, p_0 e d (cfr. (2.3)); il valore di una costante può cambiare durante una dimostrazione senza che il simbolo adoperato sia modificato.

Ringrazio il Prof. G. Stampacchia per i suoi utili consigli.

1. In questo numero enunceremo dei risultati legati al principio di massimo le cui dimostrazioni si eseguono con note tecniche introdotte da Stampacchia in [13]; cfr. anche M. Miranda [10] e De Giorgi - Stampacchia [3].

Osservazione 1.1 — Definiamo

$$B(p) = -A(-p) \;; \tag{1.1}$$

la funzione continua B(p) soddisfa le proprietà (0.2) . . . (0.5). Consideriamo l'operatore $\bar{L}\, w = \operatorname{div} B(\nabla w)$. La trasformazione $w \longrightarrow -w$ applica le soluzioni di (0.14) relative ad uno degli operatori L o $\bar{L}$ nelle soluzioni di (0.15) relative all'altro operatore, e reciprocamente. Inoltre la stessa trasformazione applica le soprasoluzioni, soluzioni e sottosoluzioni relative ad uno degli operatori rispettivamente nelle sottosoluzioni, soluzioni e soprasoluzioni relative all'altro operatore. Se in particolare

$$A(-p) = -A(p) \tag{1.2}$$

l'applicazione $w \longrightarrow -w$ trasforma soprasoluzioni in sottosoluzioni, e reciprocamente.

Sia E un sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$; se $v \in H^{1,t}(\Omega)$ indicheremo con $\sup_E v$ e $\inf_E v$ rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore

(4) i. e. esiste un cono (N − 1) - dimensionale di vertice y e contenuto in $\complement\,\Omega$.

8

di v su E. L'estremo superiore e l'estremo inferiore essenziali (i. e. a meno di insiemi di misura nulla) saranno indicati con i simboli $'\mathrm{Sup}_{,}$ e $'\mathrm{Inf}_{,}$.

Lemma 1.2 — *La soluzione* $u_1(x)$ *di* (0.13) *soddisfa le maggiorazioni*

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leqq \operatorname*{Inf}_{\Omega} u \leqq \operatorname*{Sup}_{\Omega} u \leqq \sup_{\partial\Omega} \varphi . \tag{1.3}$$

Lemma 1.3 — *Sia* w *una sottosoluzione* z *una soprasoluzione e supponiamo che* $w \leqq z$ *su* $\partial\Omega$; *allora* $w(x) \leqq z(x)$ *quasi ovunque su* Ω.

Corollario 1.4 — *Se* u *e* v *sono due soluzioni rispettivamente appartenenti a* V_φ *e* V_ψ *allora*

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega} | u - v | \leqq \sup_{\partial\Omega} | \varphi - \psi | . \tag{1.4}$$

Lemma 1.5 — *Sia* $u = u_2$ *la soluzione di* (0.14). *Allora* $u(x) \leqq m$ *quasi ovunque in* Ω; *in particolare* $u = m$ *su* E. *Analogamente la soluzione* $u = u_3$ *di* (0.15) *soddisfa la disuguaglianza* $u(x) \geqq - m$ *q. o. in* Ω; *in particolare* $u = - m$ *su* E.

Lemma 1.6 — *La soluzione* $u = u_2$ *di* (0.14) *risolve in* $\Omega - E$ *il problema*

$$\int_{\Omega - E} A(\nabla u) \cdot \nabla w \; dx = 0 \qquad \forall\, w \in H_0^{1,t}(\Omega - E) . \tag{1.5}$$

Inoltre u è una soprasoluzione in Ω. Analogamente la soluzione $u = u_3$ di (0.15) risolve in $\Omega - E$ il problema (1.5) ed è una sottosoluzione in Ω.

2. In questo numero vogliamo associare ad ogni dato continuo sulla frontiera una soluzione in Ω dell'equazione

$$L u \equiv \operatorname{div} A(\nabla u) = 0. \tag{2.1}$$

Diremo che una funzione u è una soluzione in Ω dell'equazione (2.1) se

$$u \in H^{1,t}_{loc}(\Omega) ; \int_{\Omega} A(\nabla u) \cdot \nabla v \; dx = 0 , \qquad \forall\, v \in \mathfrak{D}(\Omega). \tag{2.2}$$

Osservazione 2.1 — *Se una soluzione di* (2.2) *appartiene a* $L^\infty(\Omega)$ *allora appartiene a* $C^0(\Omega)$ [5].

Lemma 2.2 — *Una famiglia di soluzioni di* (2.2) *equilimitata in* $L^\infty(\Omega)$ *è anche equilimitata in* $H^{1,t}(\Omega')$, *per ogni aperto* $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Dimostrazione — Dalle proprietà di $A(p)$ risulta ovviamente

$$(2.3) \qquad \begin{cases} A(p)\cdot p \geqq a\,|p|^t - a p_0^t\,, \\ |A(p)| \leqq a^{-1}\,|p|^{t-1} + d\,, \end{cases}$$

con d costante non negativa. Sia $k > 0$ e sia $\mathfrak{F}$ la famiglia delle soluzioni di (2.2) tali che $\operatorname*{Sup}_{\Omega} |u(x)| \leqq k$. La equilimitatezza di $\|u\|_{t,\Omega}$ è ovvia; dimostriamo quella di $\|\nabla u\|_{t,\Omega}$: Sia Λ un aperto tale che $\Omega' \subset\subset \Lambda \subset\subset \Omega$ e sia φ una funzione regolare uguale a 1 su Ω', uguale a 0 su $\Omega - \Lambda$ e tale che $0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$ su Ω. Data $u \in \mathfrak{F}$, consideriamo la funzione $v = \varphi^t u$; sostituendo v in (2.2) otteniamo con semplici calcoli

$$(2.4) \qquad \int_\Lambda A(\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi^t\,dx \leqq$$

$$\leqq t\int_\Lambda |A(\nabla u)|\;|\nabla\varphi|\;|u|\;\varphi^{t-1}\,dx\,;$$

applicando la disuguaglianza di Hölder al secondo membro di (2.4) e tenendo presente la (2.3) segue

$$\int_\Lambda A(\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi^t\,dx \leqq c\left(\int_\Lambda |A(\nabla u)|^{t/(t-1)}\,\varphi^t\,dx\right)^{t/(t-1)}.$$

Quest' ultima diseguaglianza insieme a (2.3) implica la maggiorazione

$$a\int_\Lambda |\nabla u|^t\,\varphi^t\,dx \leqq c\left(\int_\Lambda |\nabla u|^t\,\varphi^t\,dx\right)^{(t-1)/t} + c\,;$$

---

(5) Si dimostra che una tale soluzione è localmente holderiana in Ω, cfr. Ladisenskaya - Ural' Tseva [7].

ne segue allora

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^t \, dx \leqq \int_{\Lambda} |\nabla u|^t \varphi^t \, dx \leqq c_1$$

come volevamo dimostrare.

Lemma 2.3 — *Sia* $\}u_n\{$ *una successione di soluzioni di* (2.2) *equilimitate in* $L^\infty(\Omega)$ *e convergenti uniformemente verso una funzione* $u(x)$. *Allora* $u(x)$ *è una soluzione di* (2.2).

Dimostrazione — In primo luogo $u \in H^{1,t}_{loc}(\Omega)$ come conseguenza del lemma 2.2. Sia Ω' un aperto, $\Omega' \subset\subset \Omega$; poichè $u \in H^{1,t}(\Omega')$ esiste (p. $\overset{3-4}{5}$) una ed una sola funzione $u^0 \in H^{1,t}(\Omega')$ tale che $L\,u^0 = 0$ in Ω' e $u^0 - u \in H_0^{1,t}(\Omega')$; applicando il corollario 1.4 alle funzioni u^0 e u_n segue

$$\sup_{\Omega'} |u_n - u^0| \leqq \sup_{\partial\Omega'} |u_n - u| . \tag{2.5}$$

Poichè $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ uniformemente in Ω da (2.5) riesce che $u_n(x) \longrightarrow u^0(x)$ uniformemente in Ω', ossia che $u^0(x) = u(x)$ in Ω'; in particolare $L\,u = 0$ in Ω' e dall' arbitrarietà di Ω' segue la tesi.

Abbiamo così dimostrato l' esistenza e l' unicità delle soluzioni del problema di Dirichlet (0.6) con dato di frontiera continuo:

Teorema 2.4 — *Ad ogni* $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ *corrisponde una funzione* $u(x)$ *(unica) tale che se* $\}\varphi_n\{$ *è una successione di funzioni in* $C^1(\overline{\Omega})$ *che converge uniformemente a* φ *su* $\partial\Omega$ [6] *allora* $u(x)$ *è il limite uniforme in* Ω *della successione* $\}u_n(x)\{$ *delle soluzioni del problema* $L\,u_n = 0$, $u_n \in V_{\varphi_n}$. *Inoltre la funzione* $u(x)$, *che appartiene a* $H^{1,t}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, *è soluzione di* (2.2).

Il teorema è un' ovvia conseguenza del corollario 1.4 e del lemma 2.2. Si osservi che la soluzione $u(x)$ è indipendente della particolare successione approssimante $\}\varphi_n\{$.

Si osservi finalmente che dalla definizione di soluzione ora introdotta, dal lemma 1.2 e dal corollario 1.4 segue che se u e v sono le soluzioni corrispondenti ai dati continui φ e ψ allora

$$\min_{\partial\Omega} \varphi \leqq \inf_{\Omega} u \leqq \sup_{\Omega} u \leqq \max_{\partial\Omega} \varphi$$

---

[6] È ben noto che tali successioni esistono per ogni dato φ.

e

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega} | u - v | \leqq \max_{\partial\Omega} | \varphi - \psi | ;$$

il minimo ed il massimo sono intesi nel senso classico.

3. Dimostreremo in questo numero il teorema A. Indicheremo con $C^1(\partial\Omega)$ lo spazio delle restrizioni a $\partial\Omega$ delle funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$.

LEMMA 3.1 — *Un punto $y \in \partial\Omega$ è regolare se e solo se la condizione* (0.7) *è verificata per ogni dato $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$.*

Dimostrazione — Sia $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ e sia u la soluzione corrispondente; siano $\} \varphi_n \{$ e $\} u_n \{$ come nel teorema 2.4. Le funzione $\bar{u}_n(x)$ ($\bar{u}_n = u_n$ su Ω, $\bar{u}_n = \varphi_n$ in y) sono continue (per ipotesi) e convergono uniformemente in $\Omega \cup \} y \{$ alla funzione $\bar{u}(x)$ ($\bar{u} = u$ su Ω, $\bar{u} = \varphi$ in y); allora $\bar{u}(x)$ è continua in $\Omega \cup \} y \{$.

Dimostrazione del teorema A ([7]) — Condizione necessaria: supponiamo che y sia regolare. Dati ρ e m consideriamo la restrizione a $\partial\Omega$ della funzione $h(x) = m \, | x - y |^2 / \rho^2$; tale funzione appartiene a $C^1(\partial\Omega)$. Sia $V(x)$ la soluzione con il dato al bordo $h(x)$; $V(x)$ soddisfa la condizione (i) per costruzione e la condizione (ii) per definizione di punto regolare. In modo analogo, considerando il dato $-h(x)$, si dimostra l'esistenza della funzione $U(x)$. Condizione sufficiente: supponiamo che in y esista un sistema di barriere. Sia $k(x) \in C^1(\partial\Omega)$ (cfr. lemma 3.1) e sia $u(x)$ la soluzione corrispondente; poniamo

$$M = \sup_{\partial\Omega} | k(x) | . \tag{3.1}$$

Dato $\varepsilon > 0$ esiste $\rho_\varepsilon > 0$ tale che

$$| k(x) - k(y) | < \varepsilon/2 \quad \text{se} \quad | x - y | < \rho_\varepsilon , \quad x \in \partial\Omega ; \tag{3.2}$$

siano V e U le barriere relative ai valori ρ_ε e M; allora

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x) \geqq M \\ \\ U(x) \leqq -M \end{array} \right. \qquad \text{su } (\partial\Omega) \cap \complement\, I(y, \rho) . \tag{3.3}$$

([7]) cfr. anche Littman - Stampacchia - Weinberger [9].

(3.1), (3.2) e (3.3) implicano

$$(3.4) \qquad \begin{cases} h \leqq h(y) + \varepsilon/2 + \mathrm{V} \\ \\ h \geqq h(y) - \varepsilon/2 + \mathrm{U} \end{cases} \qquad \text{su } \partial\Omega .$$

Da (3.5) e dal lemma 1.3 segue

$$(3.5) \qquad \begin{cases} u(x) \leqq h(y) + \varepsilon/2 + \mathrm{V}(x) \\ u(x) \geqq h(y) - \varepsilon/2 + \mathrm{U}(x) \end{cases}$$

quasi ovunque in Ω. Inoltre la proprietà (ii) implica l'esistenza di $\bar{\rho}_\varepsilon > 0$ tale che

$$(3.6) \qquad x \in \Omega \cap \mathrm{I}(y, \bar{\rho}_\varepsilon) \Longrightarrow |\mathrm{V}(x)| < \varepsilon/2 , \quad |\mathrm{U}(x)| < \varepsilon/2.$$

Dalle relazioni (3.5) e (3.6) concludiamo che se $x \in \Omega \cap \mathrm{I}(y, \bar{\rho}_\varepsilon)$ allora $-\varepsilon \leqq u(x) - h(y) \leqq \varepsilon$, ossia $\lim_{x \to y} u(x) = h(y)$; pertanto y è regolare.

Osservazione — Se la funzione $\mathrm{A}(p)$ è positivamente omogenea (8) ossia ~~che~~ se

$$(3.7) \qquad \mathrm{A}(s\,p) = s^{t-1}\,\mathrm{A}(p) , \qquad \forall\, s > 0 ,$$

allora nella definizione 0.1 è sufficiente considerare il valore $m = 1$. Se la funzione $\mathrm{A}(p)$ verifica (1.2) allora è sufficiente considerare, nella definizione 0.1, la soprasoluzione V. Per esempio la funzione $\mathrm{A}(p) = (1 + |p|^2)^{(t-2)/t}\, p$ verifica (1.2) e la funzione $\mathrm{A}(p) = |p|^{t-2}\, p$ verifica (1.2) e (3.7); le equazioni differenziali associate a queste funzioni sono rispettivamente le equazioni di Eulero delle estremali degli integrali $\int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{t/2}\, dx$ e $\int_\Omega |\nabla u|^t\, dx$.

(8) Le ipotesi (0.4) e (0.5) implicano che il grado di omogeneità sia $t - 1$.

4. In questo numero dimostreremo il teorema B; premettiamo qualche risultato:

Lemma 4.1 — *La funzione* $u(x) = \alpha\,|\,x - y\,| + \beta$ *ove* α *e* β *sono costanti, è una sottosoluzione o una soprasoluzione in* $\mathbf{R}^N$ *secondo* $\alpha > 0$ *o* $\alpha < 0$.

Dimostrazione — Senza ledere la generalità supporremo che $u(x) = \alpha\, r$, ove $r = |\,x\,|$. Supponiamo per adesso che A sia infinitamente differenziabile. Tenendo presente l'ipotesi di monotonia si dimostra facilmente che la matrice jacobiana $\mathrm{D\,A}(p)$ della trasformazione A è semidefinita positiva in ogni punto $p \in \mathbf{R}^N$. Allora per ogni vettore unitario $\xi \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$\mathrm{D\,A}(p)\,\xi \cdot \xi \leqq \text{traccia di } \mathrm{D\,A}(p)\,, \tag{4.1}$$

poichè la traccia coincide con la somma degli autovalori. D'altra parte otteniamo con semplici calcoli

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathrm{A}(\nabla u(x)) = \\ &= \alpha\, r^{-1} \left[\text{traccia } \mathrm{D\,A}(\alpha\, x\, r^{-1}) - \mathrm{D\,A}(\alpha\, x\, r^{-1})\,(x\, r^{-1}) \cdot (x\, r^{-1})\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

per ogni $x \neq 0$; da (4.2) e (4.1) risulta che $\operatorname{div} \mathrm{A}(\nabla u(x))$ ha il segno della costante α, per ogni $x \neq 0$.

Sia ora $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^N)$ e fissiamo una funzione (cfr. De Giorgi [4]) $\gamma(x) \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}^N)$, $0 \leqq \gamma(x) \leqq 1$, $\gamma(x) = 1$ per $|\,x\,| \leqq 1$; poniamo per ogni $s > 0$ $\alpha_s(x) = \alpha(s^{-1}\,x)$ e $\varphi_s(x) = \varphi(x)\,(1 - \alpha_s(x))$; poichè $\operatorname{div} \mathrm{A}(\nabla u(x)) \geqq 0$ per ogni $x \neq 0$, risulta

$$\alpha \int_{\mathbf{R}^N} \mathrm{A}(\nabla u) \cdot \nabla \varphi_s\, dx \leqq 0\,, \tag{4.3}$$

ove $u(x) = \alpha\, r$. Convergendo $\nabla \varphi_s(x)$ puntualmente a $\nabla \varphi(x)$ quando $s \longrightarrow 0$, da (4.3) e dal teorema di Lebesgue segue

$$\alpha \int_{\mathbf{R}^N} \mathrm{A}(\nabla u) \cdot \nabla \varphi\, dx \leqq 0\,,$$

ossia la tesi.

Supponiamo ora che $\mathrm{A}(p)$ sia soltanto continua; sia $j_\varepsilon(\eta)$, per ogni $\varepsilon > 0$ ~~positivo~~, una funzione reale non negativa, infinitamente differenziabile, con supporto contenuto nella sfera $I(0, \varepsilon)$ e con integrale uguale ad 1. Poniamo $A_\varepsilon(p) = \int A(\eta)\, j_\varepsilon(p-\eta)\, d\eta$; queste funzioni sono infinitamente differenziabili ed inoltre

$$(4.4) \qquad A_\varepsilon(p) - A_\varepsilon(q) = \int [A(p-\xi) - A(q-\xi)]\, j_\varepsilon(\xi)\, d\xi .$$

L'uguaglianza (4.4) implica in particolare che A_ε soddisfa la ipotesi di monotonia e da quanto abbiamo detto risulta

$$(4.5) \qquad \alpha \int A_\varepsilon(\nabla u) \cdot \nabla \varphi \quad dx \leqq 0 , \qquad \forall\, 0 \leqq \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

D'altronde essendo $A_\varepsilon(p) - A(p) = \int [A(\eta) - A(p)]\, j_\varepsilon(p-\eta)\, d\eta$ ed essendo $A(p)$ uniformemente continua sui compatti riesce $A_\varepsilon(p) \longrightarrow A(p)$ uniformemente sui compatti; allora da (4.5) discende, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, la tesi.

Il prossimo risultato si riferisce al carattere locale della nozione di punto regolare:

Teorema 4.2 — *Siano Ω e Λ due aperti limitati e sia $y \in \partial\Omega \cap \partial\Lambda$; supponiamo che esista una sfera $I(y, r)$ tale che*

$$(4.6) \qquad I(y, r) \cap \Omega = I(y, r) \cap \Lambda.$$

Allora y è regolare rispetto a Ω se e solo se lo è rispetto a Λ.

Dimostrazione — Supponiamo per ora che $\Lambda \subset \Omega$. Sia per ipotesi y regolare relativamente a Λ; assegnati ρ e m, $0 < \rho < r$, $0 < m$, sia $V(x)$ la soluzione in Ω relativa al dato di frontiera $h(x) = m\, |x - y|^2 \rho^{-2}$; $V(x)$ verifica per costruzione la condizione (i) della definizione 0.1; dimostriamo che verifica anche la condizione (ii): Sia M soddisfacente la condizione $M \geqq \max(1, m^{-1} \sup_\Omega |V(x)|)$ e sia $V'(x)$ la soluzione in Λ con il dato $h'(x) = M m \rho^{-2} |x-y|^2$. Evidentemente $V(x)$ è una soluzione in Λ ed inoltre, come conseguenza della definizione di M, si ha che $V' \geqq V$ su $\partial\Lambda$; da quest'ultima diseguaglianza e dal lemma 1.3 deduciamo che $V'(x) \geqq V(x)$ quasi ovunque in Λ. Finalmente da quest'ultima diseguaglianza e dalla regolarità di y rispetto a Λ risulta

$$0 \leqq \lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} V(x) \leqq \lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Lambda}} V'(x) = 0 ,$$

ossia, anche la condizione (ii) è verificata. Applicando il teorema A concludiamo che y è regolare relativamente a Ω. L'esistenza della funzione $U(x)$ a cui si riferisce la definizione 0.1 si dimostra adoperando l'osservazione 1.1.

Reciprocamente, supponiamo y regolare relativamente a Ω; dati ρ e m, $0 < \rho < r$, $0 < m$, costruiamo la corrispondente barriera relativa a Λ a cui si riferisce la definizione 0.1: sia $V(x)$ la soluzione in Ω con il dato $h(x) = m \mid x - y \mid \rho^{-1}$ su $\partial\Omega$; $V(x)$ è una soluzione in Λ e verifica la condizione (ii) poichè y è regolare rispetto a Ω e $h(y) = 0$. Inoltre essendo $V = h$ su $\partial\Omega$ ed essendo $h(x)$ una sottosoluzione in Ω (lemma 4.1) deve essere $V(x) \geqq h(x)$ quasi ovunque in Ω; in particole $V \geqq h$ e quindi $V \geqq m$ su $\partial\Lambda \cap \complement\, I(y, \rho)$, come volevamo dimostrare. Il punto y è pertanto regolare relativamente a Λ. Finalmente se $\Lambda \not\subset \Omega$, si consideri l'aperto $D = I(y, r) \cap \Lambda = I(y, r) \cap \Omega$ e si tenga presente che $D \subset \Lambda$ e $D \subset \Omega$.

Dimostrazione del teorema B — Condizione necessaria: sia y regolare; dal teorema 4.2 segue che y è regolare relativamente a $\Sigma - E_\rho$; ed essendo il potenziale capacitario $u_{\rho,m}$ [risp. $u_{\rho,-m}$] la soluzione in $\Sigma - E_\rho$ (lemma 1.6) con il dato m [risp. $-m$] su ∂E_ρ e 0 su $\partial\Sigma$ (lemma 1.5) si ha la (0.15).

Condizione sufficiente: supponiamo che l'ipotesi (0.16) è verificata al variare di ρ ed m e dimostriamo l'esistenza di un sistema di barriere in y; dati $m > 0$ e $\rho > 0$ costruiremo la funzione $V(x)$ a cui si riferisce la definizione 0.1 ($U(x)$ si può costruire adoperando l'osservazione 1.1). Sia R tale che $\Sigma \subset I(y, R)$ e sia $k > 0$ tale che

$$(4.7) \qquad \frac{(k + 2m)\,\rho}{2R} = m\,;$$

indichiamo con u il potenziale capacitario $u = u_{\rho/2,\,-(m+k)}$ e definiamo in Σ la funzione $V = u + (m + k)$. V è una soluzione in $\Sigma - E_{\rho/2}$ (lemma 1.6) ed in particolare è una soluzione in Ω; ed essendo $\lim\limits_{x \to y} u(x) = -(m + k)$, V soddisfa la condizione (ii) della definizione 0.1; evidentemente $V(x) \geqq 0$ come risulta dal lemma 1.5. Finalmente consideriamo in $I(y, R)$ la funzione $f(x) = (k + 2m)\, R^{-1} \mid x - y \mid - (k + 2m)$; $f(x)$ è una sottosoluzione in $I(y, R)$ (lemma 4.1) ed in particolare è una sottosoluzione in $I(y, R) - I(y, \rho/2)$; poichè $\Sigma \subset I(y, R)$~~, dalla definizione (4.15)~~ discende che $f \leqq 0$ su $\partial\Sigma$. Inoltre da (4.7) segue $f = -(k + m)$ su $\partial I(y, \rho/2)$ e perciò

$$(4.8) \qquad f \leqq u \quad \text{su} \quad \partial I(y, \rho/2)\,.$$

Da (4.8), da $f \leqq 0$ su $\partial \Sigma$ e dal lemma 1.3 applicato a $\Sigma - \mathrm{I}(y, \rho/2)$ risulta $f(x) \leqq u(x)$ quasi ovunque su quest' ultimo insieme, ossia

$$(4.9) \qquad \mathrm{V}(x) \geqq f(x) + (m + k) \geqq m, \qquad \text{q. o. su } \Sigma - \mathrm{I}(y, \rho).$$

In particolare (4.9) implica $\mathrm{V} \geqq m$ su $\partial \Omega - \mathrm{I}(y, \rho)$ ossia la condizione (i) della definizione 0.1 è verificata.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Conti - H. Beirão Da Veiga, *Equazioni ellittiche non lineari con ostacoli sottili. Applicazioni allo studio dei punti regolari*, in corso di stampa sugli Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.

[2] R. Courant - D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. 2, Wiley, New York.

[3] E. De Giorgi - G. Stampacchia, *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. 8 vol. 38 (Marzo 1965), pp. 352-357.

[4] E. De Giorgi, *Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico*, Boll. Unione Mat. Italiana, (Febbraio 1968), pp. 135-137.

[5] O. Frostman, *Les points irreguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener*, Kungl. Fysiografiska sälls. J. Lund Förhandlingar, vol. 9 (1939).

[6] P. Hartman - G. Stampacchia, *On some non linear elliptic differential functional equations*, Acta Mathematica, vol. 115 (1966), p.p. 271-310.

[7] O. A. Ladysenskaya - N. N. Ural'tseva, *On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 14 (1961), pp. 481-495.

[8] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[9] W. Littman - G. Stampacchia - H. F. Weinberger, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficents*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, s. 3 vol. 17 (1963), pp. 45-79.

[10] M. Miranda, *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in* n *variabili*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. 19 (1965), pp. 233-249.

[11] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*, Acta Mathematica, vol. 3 (1964), pp. 247-302.

[12] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier Univ. Grenoble, t. 15 (1965) pp. 189-257.

[13] G. Stampacchia, *On Some regular multiple integral problems in the calculus of variation*, Comm. Pure Appl. Math., 1963, pp. 383-421.

[14] N. Wiener, *The Dirichlet problem*, J. Math. and Phys. vol. 3 (1924), pp. 127-146.

[15] N. Wiener, *Certain notions in potential theory*, J. Math. and Phys., vol. 3 (1924), pp. 24-51.

Pervenuta alla redazione il 13 settembre 1971