BEIRÃO DA VEIGA, HUGO
1972
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. XCIII, pp. 173-230

(3)

Sur la régularité des solutions de l'équation $\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées (*).

HUGO BEIRÃO DA VEIGA (Lisboa) (**) (***)

Sunto. – *In questo lavoro dimostreremo la regolarità L^p, L^∞ e hölderiana delle soluzioni di una classe di equazioni differenziali non lineari di tipo ellittico soggette a condizioni di frontiera di tipo misto e unilaterale* (1,2).

Résultats obtenus et interprétation des problèmes étudiés.

Dans ce travail nous démontrons la régularité L^p, L^∞ et hölderienne des solutions d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires avec divers types de conditions aux limites, particulièrement des conditions de type mêlé et de type unilatéral (1,2).

On précisera les notations et les definitions aux numéros suivantes.

On se donne un sous-ensemble ouvert connexe et borné Ω de l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^N$, de frontière $\partial\Omega$; si $\partial_1\Omega$ est un sous-ensemble fermé de $\partial\Omega$, les symboles $\partial_1^0\Omega$, Γ et $\partial_2\Omega$ désignent respectivement l'interieur, la frontière et le complémentaire de $\partial_1\Omega$ pour la topologie induite par $\boldsymbol{R}^N$ dans $\partial\Omega$; on fera l'hypothèse que $\partial_1^0\Omega$ est non vide. Comme d'habitude $\bar{\Omega}$ représent l'adhérance de Ω.

On suppose que Ω soit un ouvert de SOBOLEV, c'est-à-dire, on suppose que l'immersion de $H^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $L^{\alpha^*}(\Omega)$ soit continue et l'immersion de $H^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $L^\alpha(\Omega)$ soit compacte (cf. (2.1)).

Si w est une fonction différentiable (dans un sens qu'on ne précise pas pour le moment) nous indiquons par ∇w son vecteur gradient.

Soit $p > 1$ un nombre reèl; on indique respectivement par $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_{1,p}$ les normes dans les espaces de BANACH $L^p(\Omega)$ et $H^{1,p}(\Omega)$. On considère aussi l'espace $L^p_*(\Omega)$ avec la quasi-norme $| \ |_p$ (cf. définition 2.1).

(*) Thèse presentée à la Faculté des Sciences de Paris le 2 juin 1971.

(**) Boursier de le « Instituto de Alta Cultura » (Portugal).

(***) Entrata in Redazione il 28 giugno 1971.

(1) Une première redaction de ce travail à été terminée en Février 1970 et les résultats y contenus annoncés dans [12].

(2) Cf. FICHERA [3] et LIONS-STAMPACCHIA [6]; cf. aussi MIRANDA [7].

Pendant tout le travail α désignera une constant telle que $1<\alpha<N$.

Soit $\psi \in H^{1,\alpha}(\Omega)$; on introduit les suivantes sous-ensembles fermés de $H^{1,\alpha}(\Omega)$:

$$(0.1)\qquad \begin{cases} V_1=\{v\in H^{1,\alpha}(\Omega)\colon v-\psi\in H_0^{1,\alpha}(\Omega)\}\,,\\ V_2=H^{1,\alpha}(\Omega)\,,\\ V_3=\{v\in H_{1,\alpha}(\Omega)\colon v=\psi \text{ sur } \partial_1\Omega\}\,,\\ V_4=\{v\in H^{1,\alpha}(\Omega)\colon v\geqslant\psi \text{ sur } \partial\Omega\}\,,\\ V_5=V_3\cap V_4\,; \end{cases}$$

V_1 et V_3 sont des variétés linéaires, V_4 et V_5 sont des convexes; par comodité nous indiquerons quelquefois par V un quelconque des V_j. On considère des convexes correspondantes à des problèmes particuliers (choisis entre les plus études) mais la mèthode suivie s'adapte à beaucoup d'autres problèmes.

On pose, si $j\neq 2$, (voir p. 9)

$$(0.2)\qquad \begin{cases} M=\sup\limits_{\partial\Omega}\psi\\ m\;=\inf\limits_{\partial\Omega}\psi\\ K\;=\sup\limits_{\partial\Omega}|\psi| \end{cases}$$

et on suppose $K<+\infty$; si $j=2$ on pose par définition $M=m=K=0$.

Considérons aussi $N+1$ fonctions réelles $A_i(x,y,p)$, $1\leqslant i\leqslant N$, et $B(x,y,p)$ définies sur $\Omega\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^N$ mesurables en x pour tous les y,p et continues en y,p pour presque tous les x de Ω; par $A(x,y,p)$ nous indiquerons le vecteur de composantes $A_i(x,y,p)$. Le produit scalaire de deux vecteurs p et q de $\boldsymbol{R}^N$ s'écrira $p.q$.

Les conditions à imposer aux fonctions $A(x,y,p)$ et $B(x,y,p)$ sont du type suivant:

$$(0.3)\qquad \begin{cases} A(x,y,p)\cdot p\geqslant a|p|^\alpha-b(x)|y|^\alpha-l(x)\,,\\ |B(x,y,p)|\leqslant d(x)|p|^{\alpha-1}+e(x)|y|^{\alpha-1}+f(x)\,, \end{cases}$$

et

$$(0.3')\qquad |A(x,y,p)|\leqslant a^{-1}|p|^{\alpha-1}+g(x)|y|^{\alpha-1}+h(x)\,,$$

ou a est une constante positive et $d(x)\in L^r(\Omega)$, avec $r>N$. On se servira aussi de la condition

$$(0.3'')\qquad A(x,v(x),\nabla v(x))\in L^{\alpha'}(\Omega)\qquad \forall v\in H^{1,\alpha}(\Omega)\,.$$

Considérons finalement l'inéquation variationnelle [1]

$$u \in V\,; \qquad \int_\Omega A(x, u, \nabla u)\cdot\nabla(v-u)\,dx + \int_\Omega B(x, u, \nabla u)(v-u)\,dx \geqslant 0 \qquad \forall v \in V\,; \tag{0.4}$$

On appellera problème P_j le «problème» (0.4) lorsque V coïncide avec V_j; on écrira $u \in P_j$ pour indiquer que u est une solution de (0.4) avec $V = V_j$.

On demontrera les théorèmes suivantes [2]:

THÉORÈME I. – *Soit* $u \in P_j$, *et supposons que les majorations* (0.3) *et la condition* (0.3″) *soient verifiées avec* $y = u(x)$ *et* $p = \nabla u(x)$. *Supposons en outre que*

$$\left\{\begin{array}{l} b \in L^p(\Omega)\,, \\ e \in L^q(\Omega)\,, \\ l \in L_*^{p_0}(\Omega)\,, \\ f \in L_*^{q_0}(\Omega)\,, \end{array}\right. \tag{0.5}$$

avec $1 < p_0 < N/\alpha < p$ *et* $q^* = \alpha p/(\alpha - 1)$, $q_0^* = \alpha p_0/(\alpha - 1)$.

Alors $u \in L_*^{(\alpha p_0)^*}(\Omega)$ *et on a*

$$\begin{aligned} |u|_{(\alpha p_0)^*} \leqslant c\Big[\big(\|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)}\big)^{[(\alpha/N)/(\alpha/N - 1/p)]+n_0} + \\ + \big(1 + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)}\big)^{n_0}\big(\delta_j + \|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)}\big)\Big]\|u\|_\alpha + \\ + c\big(1 + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)}\big)_{n_0}\big(|l|_{p_0}^{1/\alpha} + |f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)} + K\big)\,; \end{aligned} \tag{0.6}$$

nous avons indiqué par n_0 *le plus petit entier qui satisfait l'inegalité*

$$n_0 \geqslant \frac{1 - 1/p_0}{\alpha/N - 1/p} \tag{0.7}$$

et par δ_j *le numero défini dans* (4.1).

THÉORÈME II. – *Soit* $u \in P_j$; *supposons que les majorations* (0.3) *et la condition* (0.3″) *soient verifiées avec* $y = u(x)$ *et* $p = \nabla u(x)$. *Supposons en outre que*

$$\left\{\begin{array}{l} b \in L^p(\Omega)\,, \\ c \in L^q(\Omega)\,, \\ l \in L_*^p(\Omega)\,, \\ f \in L_*^q(\Omega)\,, \end{array}\right. \tag{0.8}$$

---

[1] Obsérvons que pour $j = 1, 2, 3$ l'inéquation (0.4) est équivalent à l'équation obtenue en remplaçant le symbole «$\geqslant$» par «$=$».

[2] Cf. aussi le Théoème IV, p. 7. Pour un cas particulier cf. le Théorème 4.1, p. 19.

avec $p > N/\alpha$ *et* $q^* = \alpha p/(\alpha - 1)$. *Alors la solution* $u(x)$ *appartient à* $L^\infty(\Omega)$; *plus precisement*

$$\|u\|_\infty \leqslant c\Big[\big(\|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)}\big)^{[(\alpha/N)/(\alpha/N-1/p)]+m_0} + \\ + \big(1 + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)}\big)^{m_0}\big(\delta_j + \|d\|_r^{r/(r-N)\alpha}\big)\Big]\|u\|_\alpha + \\ + c\big(1 + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)}\big)^{m_0}\big(|l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)} + K\big)\,; \tag{0.9}$$

nous avons indiqué par m_0 *le plus petit entier qui satisfait l'inégalité*

$$m_0 > \frac{1 - \alpha/N}{\alpha/N - 1/p} \tag{0.10}$$

et par δ_j *le numero défini dans* (4.1).

THÉORÈME III. – *Soit* Ω *régulier* (1) *et supposons que les majorations* (0.3) *et* (0.3′) *ont lieu avec*

$$\begin{cases} b, e, l, f \in L^p(\Omega)\,, \\ g, h \in L^s(\Omega)\,, \end{cases} \tag{0.11}$$

où $p > N/\alpha$ *et* $s > N/(\alpha - 1)$; *soit* $\psi \in H^{1,q}(\Omega)$ *avec* $q > N$.

Alors il existe une constante positive δ_0 (< 1) *telle que toute solution* $u(x)$ *du problème* P_j *est hölderienne dans* $\bar{\Omega}$ *avec exposant* δ_0; *en outre la constante de Hölder* $[u]_{\delta_0,\Omega}$ *vérifie les majorations* (10.14) *et* (10.16).

REMARQUE 1. – On demontre les théorèmes de regularité sans avoir besoin de s'appuyer sur des théorèmes d'existance et d'unicité. Ce fait entraîne en particulier que les expressions qui majorent les normes des solutions dans les espaces de régularisation doivent dependre de la solution elle même. On expliciterà cette dependence en fonction de la norme des solutions dans $L^\alpha(\Omega)$.

REMARQUE 2. – Les conditions à imposer à Ω peuvent être affaiblies. La constante K peut aussi être remplacée par des constantes K_j plus petites choisies en liason avec le problème P_j considéré; en effect pour les problèmes P_3, P_4 et P_5 on peut remplacer K respectivement par $K_3 = \sup |\psi|$ sur $\partial_1\Omega$, $K_4 = \sup \{\psi\}_0$ sur $\partial\Omega$, $K_5 = \max (\sup_{\partial\Omega} \psi, \sup_{\partial_1\Omega} |\psi|)$.

En outre, pour les théorèmes I et II on peut supposer que $d \in L^N(\Omega)$ seulement.

REMARQUE 3. – On trouve dans [4], pour les problèmes P_1 et P_2, des résultats analogues a ceux des théorèmes II et III (cf. [4]: chap. 4 théorem 7.1 et 7.2, chap. 10 pages 465-467).

(1) Cf. Définition 6.1.

Avant de démontrer les résultats énoncés on fera quelques considérations sur les problèmes etudies et sur leurs liaisons avec d'autres résultats; on abordera aussi le problème de l'existence des solutions pour l'inéquation (0.4).

i) Voyons quels problèmes sont traduits au sens faible par l'inéquation variationelle (0.4): par intégrations par parties on voit aisément que si u est une solution de (0.4) alors u est une solution faible dans Ω de l'équation

$$Lu \equiv \operatorname{div} A(x, u, \nabla u) - B(x, u, \nabla u) = 0 \tag{0.12}$$

et verifie (formellement) au bord une des conditions suivantes (en correspondance avec le problème P_j considéré):

1) $u = \psi$ sur $\partial\Omega$.

2) $A \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

3) $\begin{cases} u = \psi & \text{sur } \partial_1\Omega \,, \\ A\cdot n = 0 & \text{sur } \partial_2\Omega \,. \end{cases}$

4) $\left.\begin{cases} u \geqslant \psi \\ A\cdot n \geqslant 0 \\ A\cdot n(u-\psi) = 0 \end{cases}\right\}$ sur $\partial\Omega$.

5) $\begin{cases} u = \psi & \text{sur } \partial_1\Omega \,, \\ \left.\begin{array}{l} u \geqslant \psi \\ A\cdot n \geqslant 0 \\ A\cdot n(u-\psi) = 0 \end{array}\right\} & \text{sur } \partial_2\Omega \,. \end{cases}$

On a indiqué par n le vecteur normal unitaire (extérieure) à la frontière $\partial\Omega$.

ii) Comme cas particulier de (10.12) on a le cas linéaire (pour $\alpha = 2$), c'est a dire

$$Lu = -\sum_{i,j} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} - \sum_j (b_j u)_{x_j} + \sum_i d_i u_{x_i} + eu = f - \sum_j (f_j)_{x_j} \tag{0.13}$$

avec les conditions $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ et

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant a|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^N;$$

Les fonctions dans (0.13) doivent être prises dans des espaces adéquats (par exemple on obtient les théorèmes II et III en prenant les fonctions b_j, d_i, et f_j dans

$L^p(\Omega)$ avec $p > N$ et f et e dans $L^q(\Omega)$ avec $q > N/2$). Ainsi les théorèmes I, II et III generalisent-ils des résultats obtenues par divers auteurs: DE GIORGI a demontré [2] la continuité hölderienne locale des solutions $u \in H^{1,2}(\Omega)$ de l'equation $\sum_{i,j} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} = 0$. STAMPACCHIA a démontré la continuité hölderienne dans $\bar{\Omega}$ des solutions du problème mêlé de DIRICHLET-NEUMANN [8] et du problème de DIRICHLET [10] pour l'équation (0.13); on trouve aussi dans [10] des résultats de régularisation qui se rattachent au théorème I ci-dessous (cf. [10], théorem 4.2). Enfin nous avons démontré [11] la continuité hölderienne dans $\bar{\Omega}$ des solutions de certaines inéquations variationnelles correspondantes à des conditions aux limites de type unilatéral [1].

iii) En ce qui concerne la question de l'existance de solutions pour les problèmes P_j on a le résultat suivant:

Supposons que les fonctions $A(x, y, p)$ et $B(x, y, p)$ satisfont aux conditions (0.3) et (0.3') avec les fonctions b, l, d, f, g et h dans les espaces indiquées dans (0.11) (il est suffisant que h et f appartiennent respectivement à $L^{\alpha'}(\Omega)$ et $L^{(\alpha^*)'}(\Omega)$ et que b et l soient finis presque partout dans Ω).

Supposons en outre que les deux conditions suivantes soient verifiées:

j) $[A(x, y, p) - A(x, y, q)] \cdot (p - q) > 0$ si $p \neq q$, pour presque tous les $x \in \Omega$ et pour tous les $y \in \boldsymbol{R}^N$.

jj) Il existe $v_0 \in V_j$ telle que

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} \frac{a(v, v - v_0)}{\|v\|} = +\infty, \qquad v \in V_j,$$

où $\|v\| = \|v\|_{1,\alpha}$ et

$$a(u, v) = \int_\Omega A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega B(x, u, \nabla u) v \, dx .$$

Alors l'inéquation variationelle (0.4) admet au moins une solution.

---

(1) Je prend l'occasion pour apporter quelque correction à mon article: *Sulla hölderianità delle soluzioni di alcune disequazioni variazionali con condizioni unilatere al bordo*, publié dans cette même revue, vol. LXXXIII (1969), pp. 73-112:

— p. 76, lignes 21 et 24 du haut, au lieu de: « $\|f_0\|_{L^{p/2}}$ », lire: « $\|f_0\|_{L^p}$ ».

— p. 89, ligne 18 du haut, au lieu de: « $\varrho = \varrho_m$; $R = \varrho_{m+1}$ », lire: « $R = \varrho_m$; $\varrho = \varrho_{m+1}$ ».

— p. 90, ligne 4 du haut, au lieu de: « $P|A(k, R)|^{1-2/P+2/N}$ », lire: « $\|G\|_p^2 |A(k, R)|^{1-2/p}$ ».

— p. 111, ligne 1 du bas, au lieu de: « Siano f_0 e f_i in $L^p(\Omega)$ con $p > N/2$ », lire: « Siano f_0 in $L^p(\Omega)$ con $p > N/2$ e f_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, in $L_q(\Omega)$ con $q > N$ ».

— p. 112, ligne 3 du haut, au lieu de: « $K\|F\|_{L^p(\Omega)}$ », lire: « $K(\|f_0\|_{L^p(\Omega)} + \|F\|_{L^q(\Omega)})$ ».

— p. 112, ligne 5 du haut, au lieu de: « $\sum_{i=0}^{N}$ », lire: « $\sum_{i=1}^{N}$ ».

Ce résultat est une conséquence de théorèmes bien connus; pour la bibliographie correspondante aussi bien que pour une exposition systématique cf. LIONS [5]. Le résultat ci-dessus et une conséquence des théorèmes 2.8 et 8.2 [1]; dans la demonstration du théorème 2.8 on doit faire quelques changements, la condition (2.42) [1] n'étant pas verifiée dans notre cas.

A propôs de ce résultat d'existance on observe que l'on peut prendre plus grands les exposants de $|y|$ dans les majorations (0.3) et (0.3′) en diminuant les exposantes de sommabilité des coefficients b, e, et g; la même observation reste vraie pour les résultats de régularité que nous démontrons dans ce travail. En effet on demontre le résultat suivant:

THÉORÈME IV. – *Soit $u \in P_j$ et supposons que la condition* (0.3″) *et les majorations*

$$\left\{\begin{array}{l} A(x, y, p)\cdot p \geqslant a|p|^\alpha - b(x)|y|^\varrho - l(x)\,, \\ |B(x, y, p)| \leqslant d(x)|p|^{\alpha-1} + e(x)|y|^{\varrho-1} + f(x) \end{array}\right. \tag{0.14}$$

aient lieu avec $d(x) \in L^r(\Omega)$, $r > N$, $l \in L^p_*(\Omega)$, $f \in L^q_*(\Omega)$, $q^* = \alpha p/(a-1)$, $b(x)$, $e(x) \in \in L^\infty(\Omega)$ et $\varrho < \alpha^*$.

(*a*) *Si $p < N/\alpha$ alors $u \in L_*^{(\alpha p)^*}(\Omega)$.*

(*b*) *Si $p > N/\alpha$ alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*

(*c*) *Soient Ω régulier, $\psi \in H^{1,t}(\Omega)$, $t > N$; si $p > N/\alpha$ et si on remplace* (0.3″) *avec la condition*

$$|A(x, y, p)| \leqslant a^{-1}|p|^{\alpha-1} + g(x)|y|^{\alpha^*/\alpha'} + h(x)\,, \tag{0.14′}$$

où $g(x) \in L^\infty(\Omega)$ et $h(x) \in L^s(\Omega)$, $s > N/(\alpha-1)$, alors $u \in C^{0,\delta_0}(\bar{\Omega})$ avec $0 < \delta_0 < 1$.

La partie (*a*) du théorème se demontre d'après le théorème 4.1 (i) (avec la technique employée pour demontrer le théorème I). La partie (*b*) se demontre d'après la partie (*a*) et d'après le théorème 4.1 (ii) (comme on fait pour le théorème II). Finalement (*c*) est une conséquence de (*b*) et du théorème III. On peut trouver (toujours avec les techniques employées pour les théorèmes I, II, et III) des majorations pour les normes des solutions dans les espaces de régularisation.

En particulier il s'ensuit que les solutions u de (0.4) relatives à l'operateur linéaire L défini dans (0.13) sont holderiènnes (b_j, d_i, $f_j \in L^p(\Omega)$ avec $p > N$, f, $e \in L^q(\Omega)$ avec $q > N/2$) si on ajoute à l'operateur L des termes du type $\sum_{j=1}^{N}\big(g_j(x)\varphi_j(u(x))\big)_{x_j} + e(x)\cdot \cdot\varphi(u(x))$ avec $g_j(x)$, $e(x) \in L^\infty(\Omega)$ et $|\varphi_j(y)| \leqslant c|y|^\varrho$ ($\varrho < N/(N-2)$), $|\varphi(y)| \leqslant c|y|^\beta$ ($\beta < < (N+2)/(N-2)$); évidement φ, φ_j: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

---

[1] Dans [5].

Je remercie le Prof. STAMPACCHIA qui a bien voulu suivre mon travail et me guider par ses utiles conseils et le Prof. LIONS par ses critiques et suggestions.

1. – Notations. Quelques définitions et quelques résultats connus.

1. – Nous représentons la norme d'un élément $\xi \in \boldsymbol{R}^N$ par $|\xi|$ et la mesure (selon Lebesgue) d'un ensemble mesurable $A \subset R^N$ par $|A|$.

Nous indiquons par Lip $(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions lipschitziennes sur $\bar{\Omega}$ et par $C^1(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continuellement différentiables sur Ω dont les derivées premières soient prolongeables continûment à $\partial\Omega$. Nous representons par $L^p(A)$ ($p > 1$, A mesurable) l'espace des fonctions mesurables et de puissance p sommable en A avec la norme

$$\|w\|_{p,A} = \left(\int_A |w(x)|^p dx\right)^{1/p};$$

Si $f(x)$ est une fonction mesurable sur A on indique avec $\operatorname{Sup}_A f$ et $\operatorname{Inf}_A f$ le supremum et l'infimum essentiels de $f(x)$ dans A; on dit que $f \in L^\infty(A)$ se $\operatorname{Sup} |f(x)| < +\infty$. $L^\infty(A)$ est un espace de BANACH avec la norme $\|f\|_{\infty,A} = \operatorname{Sup}_A |f(x)|$.

Si A coincide avec Ω nous écrirons quelquefois $\|w\|_p = \|w\|_{p,\Omega}$.

L'espace de SOBOLEV $H^{1,p}(\Omega)$ est définie comme la complétion de $C^1(\bar{\Omega})$ par rapport à la topologie induite par la semi-norme

$$\|w\|_{1,p} = \|w\|_p + \|\nabla w\|_p ;$$

par comodité on indique $\| |\nabla w| \|_p$ avec $\|\nabla w\|_p$ etc.,

Il est bien connu qu'une fonction lipschitzienne admet presque partout en Ω des dérivées au sens classique qui sont aussi les dérivées dans $H^{1,p}(\Omega)$, i.e.

$$\operatorname{Lip}(\bar{\Omega}) \subset H^{1,p}(\Omega) ,$$

et $H^{1,p}(\Omega)$ peut aussi être defini comme la complétion de Lip $(\bar{\Omega})$. Les définition que l'on donnera par la suite restent valables si l'on remplace l'espace $C^1(\bar{\Omega})$ par l'espace Lip $(\bar{\Omega})$.

La remarque suivante est une simple conséquence des définitions:

REMARQUE 1.1. – *Si $u \in H^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi \in \operatorname{Lip}(\bar{\Omega})$ alors $\varphi u \in H^{1,p}(\Omega)$ et*

$$(\varphi u)_{x_i} = \varphi_{x_i} u + \varphi u_{x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.1}$$

Si $\{u_n\}$ est une suite de fonctions lipschitziennes convergente vers u dans $H^{1,p}(\Omega)$ alors la suite de fonctions lipschitziennes $\{\varphi u_n\}$ converge vers φu dans $H^{1,p}(\Omega)$.

Nous indiquerons par $H_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérance en $H^{1,p}(\Omega)$ du sous-espace des fonctions continuellement differentiables avec support compact dans Ω (la définition reste equivalente si l'on remplace le dernier espace par celui des fonctions lipschitziennes et nulles dans $\partial\Omega$).

Etant donné un sous-ensembles fermé E de $\bar{\Omega}$ on dira que une fonction $v \in H^{1,p}(\Omega)$ est nulle sur E s'il y a une suite de fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ nulles sur E et convergentes fortement (ou faiblement [1]) vers v dans $H^{1,p}(\Omega)$; si $\psi \in H^{1,p}(\Omega)$ on dira que $v=\psi$ sur E si $v-\psi=0$ sur E (cf. STAMPACCHIA [10]).

Analoguement on dira que $v \geq 0$ sur E s'il existe une suite de fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$, non négatives sur E, convergente vers v; comme dans le cas précédant on dira que $v \geq \psi$ sur E si $v-\psi \geq 0$ sur E.

Finalement nous indiquerons avec le symbole $\inf_E v$ la borne supérieure des nombres k telles que $v \geq k$ sur E [2]; de façon analogue nous définissons $\sup_E v$.

Si $g(t)$ est une fonction définie sur $\boldsymbol{R}$, réele et lipschitzienne, alors $g(t)$ est dérivable presque partout (en effet $g(t)$ est absolument continue); supposons que l'ensemble des points de $\boldsymbol{R}$ où $g(t)$ n'est pas dérivable soit fini (hypothèse non indispensable). Alors (cf. [10]) la fonction composée $v(x)=g(u(x))$ appartient à $H^{1,p}(\Omega)$ et ses dérivées peuvent être calculeés par la règle usuelle de la dérivations des fonctions composées:

$$v_{x_i}(x) = g'(u(x))\, u_{x_i}(x), \qquad i=1,2,\ldots,N; \tag{1.2}$$

avec, si $u_{x_i}(x)=0$, $g'(u(x))\,u_{x_i}(x)=0$ même si dans le point $u(x)$ la derivée $g'(u(x))$ n'existe pas.

En particulier, si $u(x) \in H^{1,p}(\Omega)$ alors les fonctions $|u(x)|$, $\{u\}_k(x)=\max(u(x),k)$ et $\{u\}^k(x)=\min(u(x),k)$, où k est un réel, appartiennent à $H^{1,p}(\Omega)$; si en outre $v(x)\in H^{1,p}(\Omega)$ alors $\max(u(x),v(x)) = v(x) + \max(u(x)-v(x),0) \in H^{1,p}(\Omega)$.

Jusqu'à la fin de ce numéro on fera les conventions suivantes: « convergence » indique toujours « convergence dans $H^{1,p}(\Omega)$ »; le symbole « $\rightharpoonup$ » indique convergence faible dans $H^{1,p}(\Omega)$; E est un sous-ensemble fermé de $\bar{\Omega}$.

Nous démontrons maintenant quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite:

LEMME 1.1. – *Soit u une fonction appartenant à $H^{1,p}(\Omega)$ et soit $M=\sup_E u$. Alors il existe une suite $\{u_n\}$ de fonctions lipschitziennes convergente vers u et tel que $u_n(x)<M$ pour tout point $x \in E$.*

DÉMONSTRATION. – Soit n un entier positif arbitraire et soit $\{v_m^{(n)}\}$ une suite, en m, de fonctions lipschitziennes convergent vers u et telles que

$$v_m^{(n)}(x) < M + \frac{1}{n}, \qquad x \in E; \tag{1.4}$$

[1] D'après le Théorème de BANACH et SAKS la définition ne change pas.
[2] Evidemment on peut avoir $\inf_E v < \operatorname{Inf}_E v$.

Alors il existe un indice m_n tel que

$$\|v_{m_n}^{(n)} - u\|_{1,p} < \frac{1}{n} . \tag{1.5}$$

Posons $v_n = v_{m_n}^{(n)}$ pour tout n; d'après (1.4) et (1.5) $v_n(x) < M + 1/n$ quelque soit $x \in E$, et $v_n \to u$. Alors la suite de fonctions $u_n(x) = v_n(x) - 1/n$ vérifie la thèse.

LEMME 1.2. - *Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux suites convergentes vers u et v respectivement. Alors on a*

$$\max\,(u_n(x), v(x)) \rightharpoonup \max\,(u(x), v(x)) . \tag{1.6}$$

DÉMONSTRATION. - On peut se borner au cas $u_n = 0$ pour tout n. Dans ces conditions soient $z_n(x) = \max\,(0\;\, v_n(x))$ et $z(x) = \max\,(0.\; v(x))$; d'après (1.2) on obtient

$$\|z_n\|_{1,p} \leqslant \|v_n\|_{1,p} \leqslant \text{const} . \tag{1.7}$$

On démontrera maintenant que si $\{z_\mu\}$ est une suite extraite alors

$$« z_\mu \rightharpoonup \bar{z} » \Rightarrow « \bar{z} = z » . \tag{1.8}$$

En effet on peut extraire de $\{v_\mu(x)\}$ une suite ponctuelement convergente vers $v(x)$ p.p. dans Ω; et à cette suite correspond une suite extraite de $\{z_\mu(x)\}$ convergente p.p. vers $z(x)$ et convergente faiblement vers $\bar{z}$. Alors on doit avoir $\bar{z} = z$. D'après (1.7) et (1.8) on conclut que $z_n \rightharpoonup z$.

COROLLAIRE 1.1. - *Soient $u\;\, v \in H^{1,p}(\Omega)$ et supposons que $u(x) \geqslant v(x)$ p.p. dans Ω; alors*

$$\sup_E u \geqslant \sup_E v . \tag{1.9}$$

COROLLAIRE 1.2. - *Soient u, v, $\psi \in H^{1,p}(\Omega)$. Si $u \leqslant \psi$ et $v \leqslant \psi$ sur E alors* $\max\,(u, v) \leqslant \psi$ *sur E.*

COROLLAIRE 1.3. - *L'égalité*

$$\sup_E \max\,(u(x), v(x)) = \max\,(\sup_E u,\; \sup_E v)$$

a lieu pour tous $u, v \in H^{1,p}(\Omega)$.

LEMME 1.3. - *Soit $u \in H^{1,p}(\Omega)$ et $M = \sup_E u$; alors $\{u\}^k = u$ sur E pour tout $k \geqslant M$. En plus: on peut approcher dans $H^{1,p}(\Omega)$ la fonction min $(u, k) - u$ avec des fonctions lipschitziennes nulles dans une voisinage (dans $\bar{\Omega}$) de E. En particulier si $E \equiv \partial\Omega$ la fonction $\{u\}^k - u$ appartient à $H_0^{1,p}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. – Soit $\{u_n\}$ la suite de fonctions du lemme 1.1 relative à u; Alors les fonctions $v_n = k - u_n$ satisfont la majoration

$$v_n(x) > 0 \qquad x \in E \tag{1.10}$$

et en outre $v_n \rightharpoonup k - u$. L'inégalité (1.10) entraîne que les fonctions lipschitziennes $v_n(x)$ soient strictment positives dans une voisinage de E (voisinage dépendent de v_n).

Considerons finalement les fonctions $w_n(x) = \min(0, v_n(x))$, fonctions qui sont nulles dans une voisinage de E; en vertu du lemme 1.2 (¹) $w_n \rightharpoonup \min(0, k-u)$.

En observant que $\min(0, k-u) = \min(u, k) - u$ on démontre la thèse.

Si $u(x)$ est une fonction mesurable dans Ω on indiquera respectivement avec $A(k)$ et $B(k)$ (k réel quelconque) les sous ensembles $\{x \in \Omega: u(x) \geqslant k\}$ et $\{x \in \Omega: u(x) \leqslant k\}$. Puisque les «fonctions» sont ici des classes d'équivalence, les ensembles $A(k)$ et $B(k)$ sont définis à moin d'ensembles de mesure nulle.

On démontre maintenant le lemme suivante:

LEMME 1.4. – *Soit $u \in H^{1,p}(\Omega)$ une fonction ponctuellement nulle dans en ensemble $B \subset \Omega$. Alors étant donné $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $B_\varepsilon \subset B$ tel que*

i) $\quad |B_\varepsilon| > |B| - \varepsilon$,

ii) $\quad u = 0 \quad$ sur B_ε.

DÉMONSTRATION. – On suppose, sans perte de généralité, que B est fermé. Soit $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$, $u_n \to u$; alors il existe une suite extraite, que l'on appelera encore u_n, tel que $u_n \to u$ ponctuellement (presque partout dans Ω). D'après le théorème de SEVERINI et EGOROFF il y a un sous ensemble fermé Ω_ε de mesure $|\Omega_\varepsilon| > |\Omega| - \varepsilon$ où la covergence est uniforme; posons

$$S_n = \sup_{\Omega_\varepsilon} |u_n(x) - u(x)|; \tag{1.11}$$

evidemment $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$.

En outre posons $v_n = \{u_n\}_{S_n} + \{u_n\}^{-S_n}$, c'est à dire

$$v_n'(x) = \begin{cases} u_n(x) - S_n & si \ \ u_n(x) \geqslant S_n\,, \\ 0 & si \ \ |u_n(x)| \leqslant S_n\,, \\ u_n(x) + S_n & si \ \ u_n(x) \leqslant -S_n \end{cases} \tag{1.12}$$

D'après (1.2) il s'ensuit

$$\nabla v_n(x) = \begin{cases} \nabla u_n(x) & si \ \ u_n(x) \geqslant S_n\,, \\ 0 & si \ \ |u_n(x)| \leqslant S_n\,, \\ \nabla u_n(x) & si \ \ u_n(x) \leqslant -S_n\,. \end{cases}$$

(¹) Chaque résultat dans ce numéro donne lieu à un résultat dual en changeant sup, max et $>$ avec inf, min et $<$.

Posons $B_\varepsilon = B \cap \Omega_\varepsilon$. Les fonctions $v_n(x)$ sont lipschitziennes dans $\bar{\Omega}$ et nulles sur B_ε; en outre

$$\|v_n - u_n\|_\infty \leqslant S_n \tag{1.13}$$

et

$$\|\nabla v_n\|_p \leqslant \|\nabla u_n\|_p \leqslant \text{const}. \tag{1.14}$$

D'après (1.13) [1] et (1.14) il s'ensuit $v_n \rightharpoonup u$; le lemme et ainsi demontré.

COROLLAIRE 1.4. – *Soit $u \in H^{1,p}(\Omega)$ et k_0 un réel. Alors étant donné $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé B_ε contenu dans $B(k_0)$ tel que*

i) $$|B_\varepsilon| > B(k_0)| - \varepsilon\,,$$

ii) $$\{u\}^k - u = 0 \qquad \textit{sur } B_\varepsilon,\ \forall k \geqslant k_0\,.$$

2. – Si α et q sont deux nombres réels qui satisfont aux inégalités $1 < \alpha < N$ et $1 < q$ nous indiquerons par α^* et q' les nombres définis par les égalités suivantes:

$$\frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{N}\,, \qquad \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}\,. \tag{2.1}$$

Nous introduisons maintenant les espaces $L^p_*(\Omega)$ et nous énoncerons deux lemmes qui nous seront utiles dans le numéro 4.

DEFINITION 2.1. – *Etant donné un nombre réel p, $p > 1$, nous indiquerons avec $L^p_*(\Omega)$* [2] *l'espace des fonctions $f(x)$ mesurables sur Ω pour lesquelles il existe une constante A non negative telle que*

$$|\{x \in \Omega\colon |f(x)| > t\}| \leqslant \left(\frac{A}{t}\right)^p, \qquad \forall t > 0\,; \tag{2.2}$$

La plus petite constante A pour laquelle la majoration (2.2) est vérifiée sera indiquée par $|f|_{p,\Omega}$ ou seulement $|f|_p$.

On voit aisément que $L^p_*(\Omega)$ est un espace linéaire et que l'application $f \to |f|_p$ est une quasi-norme dans cette espace (et l'espace est complet par rapport à $|\ |_p$).

On déduit aussi de la définition que $L^p(\Omega) \subset L^p_*(\Omega)$ avec immersion continue. Réciproquement on a pour tout β, $1 \leqslant \beta < p$, $L^p_*(\Omega) \subset L^\beta(\Omega)$ avec immersion continue. Plus généralement on a le lemme suivant, dont la démonstration est bien connue:

---

[1] (1.13) entraînent en particulier que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$.

[2] C'est l'espace (bien connu) $L^p(\Omega)$ faible.

LEMME 2.1. – *Si* $f \in L^p_*(\Omega)$ *et* $1 \leqslant \beta < p$ *alors*

$$\int_E |f|^\beta dx \leqslant \frac{p}{p-\beta} |E|^{1-\beta/p} |f|^\beta_p \tag{2.3}$$

quelque soit le sous-ensemble mesurable E *de* Ω.

La majoration (2.3) permet de démontrer le résultat suivant:

LEMME 2.2. – *Soient* f *et* g *deux fonctions telles que les hypothèses suivantes aient lieu*:

$$\begin{cases} f \in L^p_*(\Omega) \\ g \in L^q(\Omega) \end{cases}$$

avec $1/p + 1/q = 1/\alpha < 1$.

Alors le produit $f\,g$ *appartient à* $L^\alpha_*(\Omega)$ *et en outre on a*

$$|fg|_\alpha \leqslant \left(\frac{p}{p-q'}\right)^{1/q'} \|g\|_q |f|_p \, ;$$

En particulier

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leqslant c(p, q)|\Omega|^{1-1/q-1/p}\|g\|_q |f|_p \, . \tag{2.4}$$

3. – On indique avec V^0_3 le sous-espace de $H^{1,\alpha}(\Omega)$ des fonctions nulles sur $\partial_1\Omega$ (c'est à dire, $V^0_3 = V_3$ pour $\psi = 0$).

LEMME 3.1. – *Soit* Ω *un ouvert de Sobolev. Alors il existe une constante positive* c_0 *telle que*

$$\|v\|_{\alpha^*} \leqslant c_0 \|\nabla v\|_\alpha \tag{3.1}$$

pour toutes les fonctions v:

a) appartenant à $H^{1,\alpha}(\Omega)$ *et nulles sur un ensemble* $E(v)$ *de mesure* $|E(v)| \geqslant 4^{-1}|\Omega|$ (¹);

b) appartenant à V^0_3 (²);

c) appartenant à $H^{1,\alpha}_0(\Omega)$ (²).

DÉMONSTRATION. – Cas *a*): Puisque par hypothèse $\|v\|_{\alpha^*} \leqslant \text{cost.}\, \|v\|_{1,\alpha}$ il nous suffira de démontrer que

$$\|v\|_\alpha \leqslant \text{cost.}\, \|\nabla v\|_\alpha \tag{3.2}$$

(¹) Evidemment le résultat est vrai si l'on pose $|E(v)| \geqslant \tau|\Omega|$ avec $\tau > 0$.

(²) Cf. Remarque p. 14.

avec une constante indépendent de la fonction v. Supposons que par l'absurde (3.2) ne soit vérifié par aucune constante. Alors il y aura des fonctions $v_n \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ nulles sur des sous-ensembles E_n de mesure $|E_n| \geqslant 4^{-1}|\Omega|$ et telles que:

$$\|v_n\|_\alpha = 1\,, \tag{3.3}$$

$$\|\nabla v_n\|_\alpha < \frac{1}{n}\,; \tag{3.4}$$

Dans ces conditions on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|\nabla v_n\|_\alpha = 0\,. \tag{3.5}$$

D'autre part puisque l'immersion de $H^{1,\alpha}(\Omega)$ dans $L^\alpha(\Omega)$ est compacte on peut extraire une suite $\{v_\mu\}$ qui converge dans $L^\alpha(\Omega)$; mais une telle suite, d'aprés (3.5), doit converger dans $H^{1,\alpha}(\Omega)$ vers une fonction constante v; et d'aprés (3.3) on obtient

$$|\Omega|\,|v|^\alpha = 1\,. \tag{3.6}$$

Mais étant $\{v_\mu\}$ une suite de Cauchy dans $L^\alpha(\Omega)$ il existe un entier μ_0 tel que

$$\mu, \nu \geqslant \mu_0 \Rightarrow \|v_\mu - v_\nu\|_\alpha \leqslant \tfrac{1}{8}\,; \tag{3.7}$$

Puisque v_{μ_0} est nulle sur E_{μ_0} (au sens du numero 1 et par conséquence presque partout) on a pour tout μ

$$\int_{E_{\mu_0}} |v_\mu|^\alpha dx = \int_{E_{\mu_0}} |v_{\mu_0} - v_\mu|^\alpha dx \leqslant \int_\Omega |v_{\mu_0} - v_\mu|^\alpha dx\,. \tag{3.8}$$

D'après (3.7) et (3.8) on déduit que pour tout $\mu \geqslant \mu_0$ on a

$$\int_{E_{\mu_0}} |v_\mu|^\alpha dx \leqslant \tfrac{1}{8}\,,$$

et passant à la limite pour $\mu \to +\infty$ on obtient $|E_{\mu_0}|\,|v|^\alpha \leqslant 1/8$; cette dérnière inégalité, avec (3.6) et l'hypothèse sur la mesure de E_{μ_0} entraine $1/8 \geqslant 1/4$; on est donc arrivé à l'absurde.

Cas *b*): Ce cas ce démontre d'une manière tout à fait analogue: on prouve donc l'existance d'une fonction $v \in V_3^0$ constante et non nulle dans Ω; puisque $\partial_1^0\Omega$ n'est pas vide une telle fonction ne peut pas exister (on voit que l'hypothèse $\partial_1^0\Omega \neq \emptyset$ peut être beaucoup afaiblie; il suffit de supposer que la capacité de $\partial_1\Omega$ est non nulle).

Cas *c*): Il s'agit d'un résultat bien connu.

REMARQUE. - Si l'on étudie les problèmes P_3 et P_5 (ce qui correspond au cas *b*) du lemme précédent) on peut substituer la condition « Ω de Sobolev », par les conditions « $V_3^0 \hookrightarrow L^{\alpha^*}(\Omega)$ continue », et « $V_3^0 \hookrightarrow L^{\alpha}(\Omega)$ compacte ». Si l'on se ramène au problème P_1 des conditions sur Ω sont inutiles puisque le lemme 3.1 *c*) est valable pour tout Ω.

§ 2. – Appartènance des solutions à $L^\infty(\Omega)$.

4. – Toutes les constantes qui interviennent dans ce travail dépendent au plus de α, N, $\partial_1\Omega$, Ω et des exposantes de sommabilité soit de ψ (cf. (0.1)) soit des fonctions aux deuxièmes membres de (0.3) et (0.3') (ou des majorations qui éventuellement les remplaces).

En outre une constante peut changer sa valeur au cours d'une demonstration sans que nous changions la notation.

Toujours avec le but d'uniformiser l'étude des problèmes P_j on pose

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1, 3, 5, \\ 1 & \text{si } j = 2, 4. \end{cases} \tag{4.1}$$

Dans ce numéro u indiquera une solution de l'inequation (0.4); on suppose aussi (pendant tout ce numéro) que au lieu de (0.3) on a

$$\begin{cases} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \geqslant a|\nabla u|^\alpha - l(x)\,, \\ |B(x, u, \nabla u)| \leqslant d(x)|\nabla u|^{\alpha-1} + f(x)\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $a > 0$, $d(x) \in L^r(\Omega)$ avec $r > N$, $l(x) \in L^p_*(\Omega)$ et $f(x) \in L^q_*(\Omega)$ avec $q^* = ap/(\alpha - 1)$; observons que $q > N/\alpha$, $q = N/\alpha$ ou $1 < q < N/\alpha$ si et seulement si $p > N/\alpha$, $p = N/\alpha$ ou $1 < p < N/\alpha$ respectivement.

Soit $v \in V$; nous indiquerons par $k_1(v)$, ou pour abreger par k_1, le nombre

$$k_1 = \left(\frac{2c_0\|d\|_r}{a}\right)^{Nr/(\alpha(r-N))} \|v\|_\alpha\,, \tag{4.3}$$

c_0 étant la constant du lemme 3.1; avec $k_0(v)$ (ou k_0) on indiquera le nombre ainsi défini:

$$k_0 = \left(\frac{2}{|\Omega|}\right)^{1/\alpha} \|v\|_\alpha\,. \tag{4.4}$$

LEMME 4.1. – *Soit $v \in V_j$ et soit k un reel tel que*

$$\begin{cases} k \geqslant M & \textit{si } j = 1, 3, 5. \\ k \geqslant k_0 & \textit{si } j = 2. \\ k \geqslant \max(k_0, M) & \textit{si } j = 4. \end{cases} \tag{4.5}$$

Alors la fonction $w = \{v\}^k$ *appartient à* V_j; *en plus*

$$\left(\int_{A(k)} (v-k)^{\alpha^*} dx\right)^{1/\alpha^*} \leqslant c_0 \left(\int_{A(k)} |\nabla v|^\alpha dx\right)^{1/\alpha}. \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION. – La première partie du lemme découle des hypothèses (4.5) et des résultats du numéro 1. Démonstrons maintenant la deuxième partie: d'après le lemme 1.3 on a

$$\begin{cases} w - v \in H_0^{1,\alpha}(\Omega) & si\ j=1\,, \\ w - v \in V_0^3 & si\ j = 3, 5\,; \end{cases}$$

et en utilisant le lemme 3.1 (cas *c*) et *b*)) il s'ensuit que $w - v$ satisfait (3.1), à savoir, (4.6) est vérifié.

Si $j=2$ ou $j=4$, $w-v$ est nulle sur $B(k_0)$; mais d'après la définition de k_0 suit

$$\frac{|\Omega|}{2} k_0^\alpha \geqslant \int_{A(k_0)} |v|^\alpha dx \geqslant k_0^\alpha |A(k_0)|\,,$$

à savoir, $|A(k_0)| \leqslant 2^{-1}|\Omega|$; par conséquent $|B(k_0)| \geqslant 2^{-1}|\Omega|$ d'où nous concluons d'après les lemmes 1.4 et 3.1 (cas *a*) que $w-v$ vérifie (3.1).

De manière tout à fait analogue on démontre le lemme suivant:

LEMME 4.1'. – *Soit* $v \in V_j$ *et soit* k *un réel tel que*

$$\begin{cases} k \leqslant m & si\ j = 1, 3, 5\,. \\ k \leqslant -k_0 & si\ j = 2, 4\,. \end{cases}$$

Alors la fonction $w = \{v\}_k$ *appartient à* V_j *et en outre la majoration suivant est valable*:

$$\left(\int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*} dx\right)^{1/\alpha^*} \leqslant c_0 \left(\int_{B(k)} |\nabla v|^\alpha dx\right)^{1/\alpha}. \tag{4.7}$$

On va maintenant démontrer le résultat suivant:

LEMME 4.2. – *Si l'une des hypothèses du lemme* 4.1 *est vérifiée et si en outre* $k \geqslant k_1(v)$ *on a*

$$\|d\|_r |A(k)|^{1/N-1/r} \left(\int_{A(k)} |\nabla v|^\alpha dx\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_{A(k)} (k-v)^{\alpha^*} dx\right)^{1/\alpha^*} \leqslant \frac{a}{2} \int_{A(k)} |\nabla v|^\alpha dx\,. \tag{4.8}$$

DÉMONTRATION. – D'après la définition de k_1 il s'ensuit

$$k_1^\alpha |A(k_1)| \leqslant \int_{A(k_1)} |v|^\alpha dx \leqslant k_1^\alpha \left(\frac{a}{2c_0 \|d\|_r}\right)^{Nr/(r-N)},$$

c'est à dire

$$\|d\|_r \, |A(k_1)|^{1/N-1/r} \leqslant \frac{a}{2c_0};$$

cette inégalité associée à (4.6) entraîne la thèse.

LEMME 4.2'. – *Si l'une des hypothèses du lemme 4.1' est verifiée et si $k \leqslant -k_1(v)$ on a*

$$\|d\|_r \, |B(k)|^{1/N-1/r} \left(\int_{B(k)} |\nabla v|^\alpha dx\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*} dx\right)^{1/\alpha^*} \leqslant \frac{a}{2} \int_{B(k)} |\nabla v|^\alpha dx . \tag{4.9}$$

LEMME 4.3. – *Soit $u(x)$ une solution du problème P_j et supposons satisfaites les majorations* (4.2). *Alors si k est une réel qui satisfait la condition*

$$\begin{cases} k \geqslant \max(M, k_1) & si\ j = 1, 3, 5, \\ k \geqslant \max(k_0, k_1) & si\ j = 2, \\ k \geqslant \max(M, k_0, k_1) & si\ j = 4, \end{cases} \tag{4.10}$$

on a

$$|A(h)| \leqslant c \frac{\left(\|l\|_p + |f|_q^{\alpha/(\alpha-1)}\right)^{\alpha^*/\alpha}}{(h-k)^{\alpha^*}} |A(k)|^{(\alpha^*/\alpha)(1-1/p)}, \qquad \forall h > k. \tag{4.11}$$

DÉMONSTRATION. – Soit $w = \{u\}^k$; on a

$$w - u = \begin{cases} k - u & si\ u \geqslant k, \\ 0 & si\ u \leqslant k, \end{cases}$$

et aussi, d'après (1.3),

$$(w-u)_{x_i} = \begin{cases} -u_{x_i} & si\ u \geqslant k, \\ 0 & si\ u \leqslant k; \end{cases}$$

D'autre part (lemme 4.1) $w \in V_j$. Alors en écrivant (0.4) avec $v = w$ on obtient

$$\int_{A(k)} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx \leqslant \int_{A(k)} |B(x, u, \nabla u)| (u-k) \, dx . \tag{4.12}$$

La majoration (4.12) et les hypothèses (4.2) entraînent

$$a\int_{A(k)}|\nabla u|^{\alpha}dx \leqslant \int_{A(k)} l\,dx + \int_{A(k)} d|\nabla u|^{\alpha-1}(u-k)\,dx + \int_{A(k)} f(u-k)\,dx\,. \tag{4.13}$$

En appliquant l'inégalité de HÖLDER aux deux derniers intégrales au deuxième membre de (4.13) ([1]) et en appliquant le lemme 4.2 on obtient

$$\frac{a}{2}\int_{A(k)}|\nabla u|^{\alpha}dx \leqslant \int_{A(k)} l\,dx + \Big(\int_{A(k)}(u-k)^{\alpha^*}dx\Big)^{1/\alpha^*}\Big(\int_{A(k)} f^{\bar\alpha}dx\Big)^{1/\bar\alpha} \tag{4.14}$$

où $\bar\alpha = (\alpha^*)'$.

En outre du lemme 2.1 découlent les majorations suivantes:

$$\int_{A(k)} l\,dx \leqslant \frac{p}{p-1}|l|_p|A(k)|^{1-1/p}\,; \tag{4.15}$$

$$\int_{A(k)} f^{\bar\alpha}\,dx \leqslant \frac{q}{q-\bar\alpha}|f|_q^{\bar\alpha}|A(k)|^{1-\bar\alpha/q}\,. \tag{4.16}$$

D'après (4.14), (4.15) et (4.16) il s'ensuit ([2])

$$c\int_{A(k)}|\nabla u|^{\alpha}dx \leqslant |l|_p|A(k)|^{1-1/p} + |f|_q|A(k)|^{(1-1/\alpha)(1-1/p)}\Big(\int_{A(k)}(u-k)^{\alpha^*}dx\Big)^{1/\alpha^*}. \tag{4.17}$$

En vertu des relations (4.17) et (4.6) on trouve

$$c\Big(\int_{A(k)}(u-k)^{\alpha^*}dx\Big)^{\alpha/\alpha^*} \leqslant |l|_p|A(k)|^{1-1/p} + |f|_q|A(k)|^{(1-1/\alpha)(1-1/p)}\Big(\int_{A(k)}(u-k)^{\alpha^*}dx\Big)^{1/\alpha^*},$$

et de cette majoration on déduit facilement que

$$\Big(\int_{A(k)}(u-k)^{\alpha^*}dx\Big)^{\alpha/\alpha^*} \leqslant c(|l|_p + |f|_q^{\alpha/(\alpha-1)})\,|A(k)|^{1-1/p}\,. \tag{4.18}$$

Finalement si $h>k$ d'après (4.18) il s'ensuit

$$|A(h)|^{\alpha/\alpha^*}(h-k)^{\alpha} \leqslant c(|l|_p + |f|_q^{\alpha/(\alpha-1)})|A(k)|^{1-1/p}\,.$$

---

[1] Avec exposants r, $\alpha/(\alpha-1)$, et $1/N-1/r$ pour le premier.

[2] $q^* = \alpha/(\alpha-1)p$.

LEMME 4.3'. – *Soit $u \in P_j$ et supposons satisfaites les majorations* (4.2). *Alors si k est un réel qui satisfait la majoration*

$$\begin{cases} k \leqslant \min(m, -k_1) & si\ j = 1, 3, 5\,, \\ k \leqslant \min(-k_0, -k_1) & si\ j = 2, 4\,, \end{cases} \tag{4.19}$$

on a

$$|B(h)| \leqslant c \frac{(|l|_p + |f|_q^{\alpha/(\alpha-1)})^{\alpha^*/\alpha}}{(k-h)^{\alpha^*}} |B(k)|^{(\alpha^*/\alpha)(1-1/p)}, \qquad \forall h < k\,. \tag{4.20}$$

La démonstration est analogue à la précédente; on doit seulement utiliser la fonction $w = \{u\}_k$ et les lemmes 4.1' et 4.2' à la place des lemmes 4.1 et 4.2.

Le lemme suivant se trouve dans [9]:

LEMME 4.4. – *Soit $\varphi(t)$ une fonction définie pour $t \geqslant k_0$, non négative et non décroissante telle que si $h > k \geqslant k_0$ l'on ait:*

$$\varphi(h) \leqslant \frac{c}{(h-k)^\alpha} [\varphi(k)]^\beta \tag{4.21}$$

c, α, β étant des constantes positives. Alors

i) *si $\beta < 1$ et $k_0 > 0$ l'on a*

$$\varphi(h) \leqslant 2^{\mu/(1-\beta)} \{c^{1/(1-\beta)} + (2k_0)^\mu \varphi(k_0)\} h^{-\mu} \tag{4.22}$$

où $\mu = \alpha/(1-\beta)$;

ii) *si $\beta > 1$, l'on a*

$$\varphi(k_0 + d) = 0 \tag{4.23}$$

où

$$d^\alpha = c[\varphi(k_0)]^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}\,. \tag{4.24}$$

THÉORÈME 4.1. – *Soit u une solution du problème P_j et soient vérifiées les majorations* (4.2). *Alors on a les résultats suivantes:*

i) *si $1 < p < N/\alpha$ alors $u \in L_*^{(\alpha p)^*}(\Omega)$ et*

$$|u|_{(\alpha p)^*} \leqslant c[|l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)} + K + (\delta_j + \|d\|_r^{Nr/\alpha(r-N)}) \|u\|_\alpha]\,. \tag{4.25}$$

ii) *si $p > N/\alpha$ alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et*

$$\|u\|_\infty \leqslant c[|l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)} + (\delta_j + \|d\|_r^{Nr/\alpha(r-N)}) \|u\|_\alpha] + K\,. \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION. – Par commodité nous indiquerons par $\overline{M}$ et $\overline{m}$ les nombres ainsi définis:

$$\overline{M} = \begin{cases} \max(M, k_1) & \text{si } j = 1, 3, 5; \\ \max(k_0, k_1) & \text{si } j = 2; \\ \max(k_0, k_1, M) & \text{si } j = 4. \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\overline{m} = \begin{cases} \min m, -k_1) & \text{si } j = 1, 3, 5; \\ \min(-k_0, -k_1) & \text{si } j = 2, 4. \end{cases} \tag{4.28}$$

On démontre d'abord l'énoncé i) du théorème: d'après le lemme 4.3 la relation (4.11) est vérifiée quels que soient h et k tels que $h > k \geqslant \overline{M}$; alors on applique à la fonction $|A(t)|$ le lemme 4.4 i) et l'on obtient

$$|A(h)| \leqslant \frac{c}{h^{(\alpha p)^*}} [(|l|_p + |f|_q^{\alpha/(\alpha-1)})^{(\alpha p)^*/\alpha} + 2\overline{M}\, |A(\overline{M})|] \tag{4.29}$$

pour tout $h \geqslant \overline{M}$; de (4.29) il suit facilment

$$|A(h)| \leqslant \left\{\frac{c(|l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)} + \overline{M})}{h}\right\}^{(\alpha p)^*} \tag{4.30}$$

toujours pour $h \geqslant \overline{M}$; mais étant

$$|A(h)| \leqslant \left\{\frac{\overline{M}|\Omega|^{1/(\alpha p)^*}}{h}\right\}^{(\alpha p)^*}, \qquad \forall\, 0 < h < \overline{M},$$

nous concluons que la rélation (4.30) est verifiée queque soit $h > 0$.

Analoguement en utilisant la rélation (4.20) nous obtenons la majoration

$$|B(h)| \leqslant \left\{\frac{c(|l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)} - \overline{m})}{-h}\right\}^{(\alpha p)^*} \tag{4.31}$$

pour tout $h < 0$.

Les rélations (4.30) et (4.31) entrainent que pour tout nombre réel positif t on a

$$|\{x \in \Omega\colon |u(x)| > t\}| \leqslant \left\{\frac{c(|l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)} + (\overline{M} - \overline{m}))}{t}\right\}^{(\alpha p)^*};$$

Et d'après la définition 2.1 on peut écrire

$$|u|_{(\alpha p)^*} \leqslant c(|l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)} + \overline{M} - \overline{m}). \tag{4.32}$$

En outre, d'après les définitions, on vérifie facilment que

$$\bar{M}-\bar{m}\leqslant\begin{cases}2(k_1+K) & \text{si } j=1,3,5\,,\\ 2(k_0+k_1+K) & \text{si } j=4\,,\\ 2(k_0+k_1) & \text{si } j=2\,,\end{cases}$$

c'est à dire que

$$\bar{M}-\bar{m}\leqslant c[K+(\delta_j+\|d\|_r^{Nr/\alpha(r-N)})\|u\|_\alpha]\,. \tag{4.33}$$

La thèse est ainsi démontrée car (4.25) est une conséquence immédiate de (4.32) et (4.33).

Démontrons la partie ii) du théorème: considerons la fonction $|A(t)|$ définie pour $t\geqslant\bar{M}$; cette fonction satisfait la rélation (4.11); alors en vertu du lemme 4.4 i) on obtient

$$\sup_\Omega u(x)\leqslant\bar{M}+d \tag{4.34}$$

où

$$d\leqslant c(|l|_p^{1/\alpha}+|f|_q^{1/(\alpha-1)})\,; \tag{4.35}$$

Les relations (4.34), (4.35) et la definition de $\bar{M}$ entrainent

$$\operatorname*{Sup}_\Omega u(x)\leqslant c[|l|_p^{1/\alpha}+|f|_q^{1/(\alpha-1)}+(\delta_j+\|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)})\|u\|_\alpha]+\max(0,M)\,. \tag{4.36}$$

Analoguement de (4.20) et du lemme 4.4 on déduit que

$$\operatorname*{Inf}_\Omega u(x)\geqslant -c[|l|_p^{1/\alpha}+|f|_q^{1/(\alpha-1)}+(\delta_j+\|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)})\|u\|_\alpha]+\min(0,m)\,. \tag{4.37}$$

Finalement d'après (4.36) et (4.37) on obtient (4.26), puisque $K=\max(M,-m)$.

5. – Dans ce numéro on élargira les hypothèses (4.2) en démontrant ainsi les théorèmes I et II.

LEMME 5.1. – *Soit $u\in P_j$ et supposons que les conditions* (0.3) *et* (0.5) *sont vérifiées avec $y=u(x)$ et $p=\nabla u(x)$; alors*

$$\begin{aligned}\|u\|_{\alpha^*}\leqslant c\big[(\|b\|_p^{1/\alpha}+\|e\|_q^{1/(\alpha-1)})^{(\alpha/N)/(\alpha/N-1/p)}+\\ +\delta_j+\|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)}\big]\|u\|_\alpha+(|l|_{p_0}^{1/\alpha}+|f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)}+K)\,.\end{aligned} \tag{5.1}$$

DÉMONSTRATION. – Par commodité l'on pose

$$\varepsilon=\frac{\alpha}{N}-\frac{1}{p}\,,\qquad \delta=N\varepsilon\,,\qquad \delta_0=N\frac{\alpha-1}{\alpha}\,\varepsilon\,. \tag{5.2}$$

Considérons la fonction $v = \{u\}^{\overline{M}}$; $v \in V$; comme on a déjà vérifié. D'après (0.4) et (0.3) il s'ensuit

$$(5.3)\qquad a\int_{A(\overline{M})}|\nabla u|^\alpha\,dx \leqslant \int_{A(\overline{M})} b|u|^\alpha\,dx + \int_{A(\overline{M})} l\,dx + \\ + \int_{A(\overline{M})} d|\nabla u|^{\alpha-1}(u-\overline{M})\,dx + \int_{A(\overline{M})} e|u|^{\alpha-1}(u-\overline{M})\,dx + \int_{A(\overline{M})} f(u-\overline{M})\,dx\,.$$

Utilisant l'inégalité de HÖLDER et (2.3) on déduit les majorations suivantes [1]:

$$(5.4)\qquad \int_{A(\overline{M})} b|u|^\alpha\,dx \leqslant \|b\|_p \|u\|^{\alpha-\delta}_{\alpha^*,A(\overline{M})}\|u\|^{\delta}_{\alpha,A(\overline{M})}\,,$$

$$(5.5)\qquad \int_{A(\overline{M})} e|u|^{\alpha-1}(u-\overline{M})\,dx \leqslant \int_{A(\overline{M})} e|u|^\alpha\,dx \leqslant \|e\|_q\|u\|^{\alpha-\delta_0}_{\alpha^*,A(\overline{M})}\|u\|^{\delta_0}_{\alpha,A(\overline{M})}\,,$$

$$(5.6)\qquad \int_{A(\overline{M})} f(u-\overline{M})\,dx \leqslant c|f|_{q_0}\|u\|_{\alpha^*,A(\overline{M})}\,,$$

$$(5.7)\qquad \int_{A(\overline{M})} d|\nabla u|^{\alpha-1}(u-\overline{M})\,dx \leqslant \frac{a}{2}\int_{A(\overline{M})}|\nabla u|^\alpha\,dx\,;$$

Pour obtenir (5.7) on utilise en plus le lemme 4.2 avec $k = \overline{M}$.

D'après le lemme 4.1 (avec $k = \overline{M}$) et les majorations (5.3) ... (5.7) il s'ensuit que

$$(5.8)\qquad \frac{a}{2c_0^\alpha}\|u-\overline{M}\|^\alpha_{\alpha^*,A(\overline{M})} \leqslant \|b\|_p\|u\|^\delta_\alpha\|u\|^{\alpha-\delta}_{\alpha^*,A(\overline{M})} + \\ + \|e\|_q\|u\|^{\delta_0}_\alpha\|u\|^{\alpha-\delta_0}_{\alpha^*,A(\overline{M})} + c|f|_{q_0}\|u\|_{\alpha^*,A(\overline{M})} + c|l|_{p_0}\,.$$

D'après (5.8) on obtient évidemment

$$(5.9)\qquad c\|u\|^\alpha_{\alpha^*,A(\overline{M})} \leqslant \|b\|_p\|u\|^\delta_\alpha\|u\|^{\alpha-\delta}_{\alpha^*,A(\overline{M})} + \|e\|_q\|u\|^{\delta_0}_\alpha\|u\|^{\alpha-\delta_0}_{\alpha^*,A(\overline{M})} + |f|_{q_0}\|u\|_{\alpha^*,A(\overline{M})} + |l|_{p_0} + \overline{M}^\alpha\,;$$

Le premier membre de (5.9) doit être plus petit ou égal à cinq fois l'un des termes du deuxième membre. Ecrivons alors les cinq majorations correspondantes (l'une au moins doit être vérifiée), simplifions-les jusqu'a obtenir des majorations pour $\|u\|_{\alpha^*,A(\overline{M})}$ et aditionons ces deuxièmes membres. On obtient ainsi

$$(5.10)\qquad \|u\|_{\alpha^*,A(\overline{M})} \leqslant c\left(\|b\|_p^{1/N\varepsilon} + \|e\|_q^{[\alpha/(\alpha-1)](1/N\varepsilon)}\right)\|u\|_\alpha + c\left(|l|_{p_0}^{1/\alpha} + |f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)} + \overline{M}\right)\,.$$

---

[1] Remarquer que $1/p + (\alpha-\delta)/\alpha^* + \delta\alpha = 1$, $1/q + (\alpha-\delta_0)/\alpha^* + \delta_0/\alpha = 1$.

Si au lieu de $v = \{u\}^{\overline{M}}$ on considère $v = \{u\}_{\overline{m}}$ on démontre de façon analogue que

$$\|u\|_{\alpha^*,B(\overline{m})} \leqslant c\big(\|b\|_p^{1/N\varepsilon} + \|e\|_q^{[\alpha/(\alpha-1)](1/N\varepsilon)}\big)\|u\|_\alpha + c\big(|l|_{p_0}^{1/\alpha} + |f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)} - \overline{m}\big)\,; \tag{5.11}$$

D'autre part

$$\|u\|_{\alpha^*,\Omega}^{\alpha^*} \leqslant \|u\|_{\alpha^*,A(\overline{M})}^{\alpha^*} + \|u\|_{\alpha^*,B(\overline{m})}^{\alpha^*} + (\overline{M} - \overline{m})|\Omega|\,. \tag{5.12}$$

Finalement (5.12), (5.10), (5.11) et (4.33) entraînent (5.1).

LEMME 5.2. – *Soit $u \in P_j$ et supposons que les conditions* (0.3) *et* (0.8) *sont vérifiées avec $y = u(x)$ et $p = \nabla u(x)$; soient p_1 et q_1 donnés par* (5.17). *Alors*

$$\left\{\begin{aligned} &|b|u|^\alpha + l|_{p_1} \leqslant \|b\|_p\|u\|_{\alpha^*}^\alpha + c|l|_p\,,\\ &|e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_1} \leqslant \|e\|_q\|u\|_{\alpha^*}^{\alpha-1} + c|f|_q\,. \end{aligned}\right. \tag{5.14}$$

Si $m_0 = 1$ (cf. (0.10)) *alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et*

$$\|u\|_\infty \leqslant c\big[|b|u|^\alpha + l|_{p_1} + |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_1} + (\delta_j + \|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)})\|u\|_\alpha\big] + K\,. \tag{5.15}$$

DÉMONSTRATION. – D'après l'appartenance de $u(x)$ à l'espace $L^{\alpha^*}(\Omega)$ et d'après les identités $1/p_1 = \alpha/\alpha^* + 1/p$ et $1/q_1 = (\alpha-1)/\alpha^* + 1/q$ il s'ensuit que $b|u|^\alpha \in L^{p_1}(\Omega)$ et $e|u|^{\alpha-1} \in L^{q_1}(\Omega)$.

On vérifie aisément que les nombres p_1 et q_1 sont liés par la relation $q_1^* = \alpha p_1/(\alpha-1)$; en outre p_1 a été choisi de façon que p/p_1 et $\alpha^*/\alpha p_1$ soient exposants duals, c'est à dire

$$\frac{p_1}{p} + \frac{\alpha p_1}{\alpha^*} = 1\,; \tag{5.16}$$

D'après (5.16), et puisque $b|u|^\alpha \in L^{p_1}(\Omega)$, il s'ensuit que

$$\|b|u|^\alpha + l\|_{p_1} \leqslant \|b\|_p\|u\|_{\alpha^*}^\alpha + c|l|_p\,,$$

et en particulier on a (5.14.1).

De la même façon on démontre (5.14.2) car q/q_1 et $\alpha^*/(\alpha-1)q_1$ sont exposants duals.

Finalement (5.15) est une conséquence de (4.26), car (si $m_0 = 1$) on a $p_1 > N/\alpha$.

LEMME 5.3. – *Supposons vérifiées les hypothèses du lemme 5.2 et supposons que $m_0 > 1$ avec $m_0 - 1 \neq (1 - \alpha/N)/(\alpha/N - 1/p)$. Soien p_n et q_n donnés par*

$$\left\{\begin{aligned} &1/p_n = 1 - n\varepsilon\,,\\ &1/q_n = (1 - 1/\alpha^*) - n\varepsilon(\alpha-1)/\alpha\,, \end{aligned}\right. \tag{5.17}$$

pour tout entier n *tel que* $1 \leqslant n < 1/\varepsilon$ [1]; *Alors pour tout indice* j *tel que* $1 \leqslant j < m_0$ *les majorations suivantes ont lieu:*

$$\left\{\begin{aligned} &|b|u|^\alpha + l|_{p_{j+1}} \leqslant c(\|b\|_p |u|^\alpha_{(\alpha p_j)^*} + |l|_p)\,, \\ &|e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_{j+1}} \leqslant c(\|e\|_q |u|^{\alpha-1}_{(\alpha p_j)^*} + |f|_q)\,, \end{aligned}\right. \tag{5.18}$$

$$|u|_{(\alpha p_j)^*} \leqslant c\left[|b|u|^\alpha + l|^{1/\alpha}_{p_j} + |e|u|^{\alpha-1} + f|^{1/(\alpha-1)}_{q_j} + K + (\delta_j + \|d\|_r^{Nr/\alpha(r-N)})\|u\|_\alpha\right]. \tag{5.19}$$

En outre $u \in L^\infty(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_\infty \leqslant c\left[|b|u|^\alpha + l|^{1/\alpha}_{p_{m_0}} + |e|u|^{\alpha-1} + f|^{1/(\alpha-1)}_{q_{m_0}} + (\delta_j + \|d\|_r^{Nr/\alpha(r-N)})\|u\|_\alpha\right] + K\,. \tag{5.20}$$

DÉMONSTRATION. – Il nous suffit de démontrer que

$$\left\{\begin{aligned} &b|u|^\alpha + l \in L^{p_j}_*(\Omega)\,, \\ &e|u|^{\alpha-1} + f \in L^{q_j}_*(\Omega)\,, \end{aligned}\right. \tag{5.21}$$

entraînent (5.18) et (5.19). Alors étant (5.21) valable pour $j = 1$ (lemme 5.2) on démontre (5.18) et (5.19) par induction; et d'après (5.21) écrite pour $j = m_0$ on déduit (5.20) en appliquant le théorème 4.1 ii).

Supposons alors que (5.21) soit verifié pour un indice j, $1 \leqslant j < m_0$; d'abord on a $p_j < N/\alpha$ et en outre $q_j^* = \alpha p_j/(\alpha - 1)$. En appliquant le théorème 4.1 i) on obtient (5.19). En particulier

$$\left\{\begin{aligned} &|u|^\alpha \in L^{(\alpha p_j)^*/\alpha}(\Omega) \\ &|u|^{\alpha-1} \in L^{(\alpha p_j)^*/(\alpha-1)}(\Omega)\,; \end{aligned}\right. \tag{5.22}$$

en outre on déduit des définitions que

$$\frac{\alpha}{(\alpha p_j)^*} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p_{j+1}}\,, \qquad \frac{\alpha - 1}{(\alpha p_j)^*} + \frac{1}{q} = \frac{1}{q_{j+1}}\,; \tag{5.23}$$

d'après (5.22), (5.23) et le lemme 2.2 on arrive à

$$|b|u|^\alpha + l|_{p_{j+1}} \leqslant c\|b\|_p \,\big||u|^\alpha\big|_{(\alpha p_j)^*/\alpha} + c|l|_p\,,$$

$$|e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_{j+1}} \leqslant c\|e\|_q \,\big||u|^{\alpha-1}\big|_{(\alpha p_j)^*/(\alpha-1)} + c|f|_q \text{ [2]},$$

c'est à dire (5.18) a lieu.

---

[1] Observer que $m_0 < 1/\varepsilon$.

[2] En particulier (5.1) est valable pour la valeur $j + 1$.

LEMME 5.4. – *Soit m_0 un entier positif et soient A, B, et u_j $(0 \leqslant j \leqslant m_0)$ des nombres non négatifs; supposons que*

$$u_{j+1} \leqslant Au_j + B \qquad \forall j,\ 0 \leqslant j < m_0\,. \tag{5.24}$$

Alors

$$u_{m_0} \leqslant A^{m_0}u_0 + B\sum_{j=0}^{m_0-1} A^j\,. \tag{5.25}$$

DÉMONSTRATION. – Nous faisons la démonstration par induction en m_0; si $m_0 = 1$ (5.25) se réduit à (5.24). Supposons maintenant que le lemme soit vrai pour $m_0 = n$; alors la relation (5.24) est vérifiée pour tout j tel que $0 \leqslant j < n+1$, et en particulier pour $0 \leqslant j < n$; d'après (5.25) il s'ensuit donc

$$u_n \leqslant A^n u_0 + B\sum_{j=0}^{n-1} A^j\,; \tag{5.26}$$

d'autre part en écrivant (5.24) pour $j = n$ on obtient $u_{n+1} \leqslant Au_n + B$. D'après cette inegalité et en tenant compte de (5.28) on déduit finalement que

$$u_{n+1} \leqslant A^{n+1}u_0 + B\sum_{j=0}^{n-1} A^{j+1} + B = A^{n+1}u_0 + B\sum_{j=0}^{n} A^j\,.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II. – Si $m_0 = 1$, (0.9) est une conséquence immédiate des lemmes 5.1 et 5.2. Supposons que $m_0 > 1$ et posons:

$$\left\{\begin{aligned} a_j &= |b|u|^\alpha + l|_{p_j}^{1/\alpha} + |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_j}^{1/(\alpha-1)}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m_0\,,\\ u_0 &= \|u\|_{\alpha^*}\,,\\ u_j &= |u|_{(\alpha p_j)^*}\,, \qquad 1 \leqslant j < m_0\,,\\ u_{m_0} &= \|u\|_\infty\,,\\ A &= \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)},\\ B &= |l|_p^{1/\alpha} + |f|_q^{1/(\alpha-1)},\\ D &= (\delta_j + \|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)})\,\|u\|_\alpha + K\,. \end{aligned}\right. \tag{5.27}$$

On suppose d'abord que $m_0 - 1 \neq (1-\alpha/N)/(\alpha/N - 1/p)$; d'après les majorations (5.14), (5.18), (5.19) et (5.20) on obtient

$$\left\{\begin{aligned} a_{j+1} &\leqslant c(Au_j + B)\,,\\ u_{j+1} &\leqslant c(a_{j+1} + D)\,, \end{aligned}\right. \tag{5.28}$$

pour tout j tel que $0 \leqslant j < m_0$. D'après (5.28) on a

$$u_{j+1} \leqslant cAu_j + c(B + D)$$

pour tout j tel que $0 \leqslant j < m_0$; en appliquant le lemme 5.4 il s'ensuit que

$$u_{m_0} \leqslant (cA)^{m_0} u_0 + c(B + D) \sum_{j=0}^{m_0-1} (cA)^j ,$$

c'est à dire

(5.29) $$u_{m_0} \leqslant cA^{m_0} u_0 + c(B + D)(1 + A^{m_0-1}) .$$

Dans le cas $m_0 - 1 = (1 - \alpha/N)/(\alpha/N - 1/p)$ la majoration (5.29) est encore valable; en effet soit s tel que

$$\frac{1 - \alpha/N}{\alpha/N - 1/s} < m_0 < \frac{1 - \alpha/N}{\alpha/N - 1/s} + 1 \text{ (1)}$$

et soit t tel que $t^* = \alpha s/(\alpha - 1)$. Alors (5.29) est valable avec p et q remplacés par s et t; et puisque $\| \ \|_s \leqslant c \| \ \|_p$, $| \ |_s \leqslant c | \ |_p$ etc., on a démontrer l'affirmation.

Finalement d'après (5.1) (2) on déduit que

(5.30) $$u_0 \leqslant cA^{(\alpha/N)/(\alpha/N - 1/p)} \|u\|_\alpha + c(B + D) ;$$

en employant (5.30) on déduit d'après (5.29) que

(5.31) $$u_{m_0} \leqslant cA^{[(\alpha/N)/(\alpha/N - 1/p)] + m_0} \|u\|_\alpha + c(B + D)(1 + A^{m_0}) .$$

Finalement en remplaçant dans (5.31) les divers symboles avec les expressions qu'ils représentent on déduit (0.9).

REMARQUE 1. – Evidemment les conditions $p > N/\alpha$, $q^* = \alpha/(\alpha - 1)p$ equivalent à p, $q > N/\alpha$.

REMARQUE 2. – D'après la forme particulière que peuvent avoir les fonctions $A_i(x, y, p)$ et $B(x, y, p)$ la majoration (0.9) peut parfois être simplifiée; par exemple pour le problème indiqué par P_1 dans [11] on trouve (0.9) avec le coefficient de $\|u\|_\alpha$ nul, malgré $e(x) = \lambda > 0$ (cf. [11]).

On va maintenant établir des résultats (correspondant aux lemmes 5.2 et 5.3) qui nous seront utiles afin de démontrer le théorème I.

---

(1) Ce qui correspond à diminuer « legèrement » p.

(2) Il est évident que si l'on a l'hypothèse (0.8) à la place de (0.5) alors (5.1) est valable avec p_0 et q_0 donnés par p et q.

LEMME 5.2′. – *Soit* $u \in P_j$ *et supposons que les conditions* (0.3) *et* (0.5) *aient lieu avec* $y = u(x)$ *et* $p = \nabla u(x)$; *soient* p_1 *et* q_1 *donnés par* (5.17). *Alors*

$$\begin{cases} b|u|^\alpha \in L^{p_1}(\Omega)\,, \\ e|u|^{\alpha-1} \in L^{q_1}(\Omega)\,. \end{cases}$$

En particulier si $n_0 > 1$ *on a*

$$\begin{cases} |b|u|^\alpha + l|_{p_1} \leqslant \|b\|_p \|u\|_{\alpha^*}^\alpha + c|l|_{p_0}\,, \\ |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_1} \leqslant \|e\|_q \|u\|_{\alpha^*}^{\alpha-1} + c|f|_{q_0}\,; \end{cases} \tag{5.32}$$

si par contre $n_0 = 1$ *on a*

$$\begin{cases} |b|u|^\alpha + l|_{p_0} \leqslant \|b\|_p \|u\|_{\alpha^*}^\alpha + c|l|_{p_0}\,, \\ |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_0} \leqslant \|e\|_q \|u\|_{\alpha^*}^{\alpha-1} + c|f|_{q_0}\,, \end{cases} \tag{5.33}$$

et

$$|u|_{(\alpha p_0)^*} \leqslant c\big[|b|u|^\alpha + l|_{p_0}^{1/\alpha} + |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)} + K + \big(\delta_j + \|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)}\big)\|u\|_\alpha\,. \tag{5.34}$$

La démonstration est identique à celle du lemme 5.2.

LEMME 5.3′. – *Supposons vérifiées les hypothèses du lemme* 5.2′ *et supposons en outre que* $n_0 > 1$; *soient* p_n *et* q_n *donnés par* (5.17). *Alors*

$$\begin{cases} b|u|^\alpha \in L_*^{p_{n_0}}(\Omega)\,, \\ e|u|^{\alpha-1} \in L_*^{q_{n_0}}(\Omega)\,; \end{cases}$$

En plus les majorations (5.19) *sont valables pour tout indice* j *tel que* $1 \leqslant j < n_0$ *et les majorations*

$$\begin{cases} |b|u|^\alpha + l|_{p_{j+1}} \leqslant c\big(\|b\|_p |u|_{(\alpha p_j)^*}^\alpha + |l|_{p_0}\big)\,, \\ |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_{j+1}} \leqslant c\big(\|e\|_q |u|_{(\alpha p_j)^*}^{\alpha-1} + |f|_{q_0}\big)\,, \end{cases} \tag{5.35}$$

sont valables pour $1 \leqslant j < n_0 - 1$. *Finalement*

$$\begin{cases} |b|u|^\alpha + l|_{p_0} \leqslant c\big(\|b\|_p |u|_{(\alpha p_{n_0-1})^*}^\alpha + |l|_{p_0}\big)\,, \\ |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_0} \leqslant c\big(\|e\|^q |u|_{(\alpha p_{n_0-1})^*}^{\alpha-1} + |f|_{q_0}\big)\,, \end{cases} \tag{5.36}$$

et

$$|u|_{(\alpha p_0)^*} \leqslant c\big[|b|u|_\alpha + l|_{p_0}^{1/\alpha} + |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)} + K + \big(\delta_j + \|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)}\big)\|u\|_\alpha\,. \tag{5.37}$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 5.3; remarque que n_0 est pris de façon que

$$p_{n_0-1} < p_0 \leqslant p_{n_0}. \ (^1)$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I. – Si $n_0 = 1$ la majoration (0.6) découle des inégalitées (5.34), (5.33) et (5.1).

Si $n_0 > 1$ on pose

$$\begin{cases} a_j = |b|u|^\alpha + l|_{p_j}^{1/\alpha} + |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_j}^{1/(\alpha-1)}, & 1 \leqslant j < n_0, \\ a_{n_0} = |b|u|^\alpha + l|_{p_0}^{1/\alpha} + |e|u|^{\alpha-1} + f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)}, & \\ u_0 = \|u\|_{\alpha^*}, & \\ u_j = |u|_{(\alpha p_j)^*}, & 1 \leqslant j < n_0, \\ u_{n_0} = |u|_{(\alpha p_0)^*} & \\ A = \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_q^{1/(\alpha-1)} & \\ B = |l|_{p_0}^{1/\alpha} + |f|_{q_0}^{1/(\alpha-1)}, & \\ D = (\delta_j + \|d\|_r^{rN/\alpha(r-N)})\|u\|_\alpha + K. & \end{cases}$$

D'après (5.1), (5.32), (5.19), (5.35), (5.36) et (5.37) on déduit que les inégalitées (5.28) et (5.30) sont valables pour $0 \leqslant j < n_0$; et on termine la demonstration comme pour le théorème II.

Les remarques 1 et 2 page 26 peuvent s'appliquer aussi dans le cas du théorème I.

§ 3. – Un théorème de continuité hölderienne.

6. – Dans ce numéro nous introduirons quelques définitions qui nous seront utiles par la suite, et nous énoncerons quelques lemmes préliminaires.

Soient $y \in \mathbf{R}^N$ et $\varrho > 0$; nous indiquerons par $I(y, \varrho)$ la boule ouverte de centre y et rayon ϱ et par $\Omega(y, \varrho)$ l'intersection de Ω avec $I(y, \varrho)$.

Posons pour $\varrho > 0$

$$I^+(\varrho) = I(0, \varrho) \cap \{x \colon x_N > 0\},$$

$$S(\varrho) = I(0, \varrho) \cap \{x \colon x_N = 0\},$$

$$S_1(\varrho) = S(\varrho) \cap \{x \colon x_{N-1} \geqslant 0\}.$$

DEFINITION 6.1. – *On dit que Ω est régulier s'ils existent deux constantes positives ϱ_0 et θ telles que pour tout point $y \in \partial\Omega$ et pour tout $\varrho < \varrho_0$ il y a une transformation bilipschitzienne*

$$T \colon \Omega(y, \varrho) \to I^+(\varrho)$$

---

(1) Si $n_0 = 1$ on a seulement $p_0 \leqslant p_1$.

telle que:

$$\theta^{-1}|x-y| \leqslant |Tx - Ty| \leqslant \theta|x-y|\,, \qquad \forall x, y \in \Omega(y, \varrho)\,, \tag{6.1}$$

$$T(I(y, \varrho) \cap \partial\Omega) = S(\varrho)\,. \tag{6.2}$$

En outre si $j = 3,5$ on exige que pour tout point $y \in \Gamma$ la condition

$$T(I(y, \varrho) \cap \partial_1\Omega) = S_1(\varrho) \tag{6.3}$$

ait lieu.

On supposera pendant la suite que Ω est régulier; par commodité on pose $\varrho_0 < 1$.

REMARQUE. – On peut beaucoup affaiblir les conditions sur Ω, particulièrement dans la partie de la frontière où $u(x)$ satisfait à une condition de DIRICHLET. Par ex emple si $u \in P_1$ alors $u(x)$ est hölderienne dans $\bar{\Omega}$ s'il existe un cone C tel que chaque point de Ω est le sommet d'un cone homothétique à C et placé dans Ω et chaque point de $\partial\Omega$ est le sommet d'un cone homothétique à C et placé dans $C\Omega$; on suppose que le donné de frontière ψ est hölderienne car dans ce cas (10.2) peut n'être pas verifié.

LEMME 6.1:

a) *Soient $y \in \partial\Omega$ et $\varrho < \varrho_0$; il existe alors une constante positive γ tel que*

$$|v(x)| \leqslant \gamma \int\limits_{\Omega(y,\varrho)} \frac{|\nabla v(t)|}{|x-t|^{N-1}}\, dt \tag{6.4}$$

presque partout dans $\Omega(y, \varrho)$, pour toute fonction $v(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega(y, \varrho))$ nulle (1) *sur $\overline{\Omega(y, \varrho)} \cap \partial\Omega$, nulle sur $\overline{\Omega(y, \varrho)} \cap \partial I(y, \varrho)$ ou nulle sur un sous-ensemble fermé de $\Omega(y, \varrho)$ de mesure plus grande ou égale à $1/4\ |\Omega(y, \varrho)|$.*

Si en particulier $y \in \Gamma$ alors (6.4) est verifiée par les fonctions $v(x)$ nulles sur $\overline{\Omega(y, \varrho)} \cap \partial_1\Omega$.

b) *si $y \in \Omega$ et $\varrho < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$ alors (6.4) est verifiée pour tout $v(x)$ nulle sur un sous-ensemble fermé de $\Omega(y, \varrho)$ de mesure plus grande ou égale à $1/4\ |\Omega(y, \varrho)|$.*

LEMME 6.2. – *Il existe une constante β telle que si y, ϱ et $v(x)$ satisfont à l'une des conditions du lemme 6.1 alors*

$$\Big(\int\limits_{\Omega(y,\varrho)} |v|^{\alpha^*} dx\Big)^{1/\alpha^*} \leqslant \beta \Big(\int\limits_{\Omega(y,\varrho)} |\nabla v|^{\alpha} dx\Big)^{1/\alpha}. \tag{6.5}$$

Les lemmes 6.1 et 6.2 se démontrent en suivant la technique employé dans [10] n. 6 (cf. [10] théorèmes 6.2 et 6.5).

(1) Au sens du numero 2.

Nous énoncerons encore le résultat suivant:

LEMME 6.3. – *Soit μ une mesure à variation bornée dans $\boldsymbol{R}^N$ et soit*

$$U_1^\mu(x) = \int_{\boldsymbol{R}^N} \frac{d\mu(t)}{|x-t|^{N-1}} \tag{6.6}$$

le potentiel d'ordre 1 *engendré par μ. Alors il existe une connstante $c = c(N)$ telle que*

$$\left|\{x \in \boldsymbol{R}^N : |U_1^\mu(x)| \geqslant \sigma\}\right| \leqslant \left(\frac{c\int |d\mu|}{\sigma}\right)^{N/(N-1)} \tag{6.7}$$

quelque soit le nombre positif σ.

Pour la démonstration cf. [1] lemme 4: ce dernier lemme se généralise facilement pour les potentiels d'ordre $\neq 2$; pour l'ordre 1 on obtient (¹)

$$\operatorname{cap}_1^* \{x \in \boldsymbol{R}^N : |U_1^\mu(x)| \geqslant \sigma\} \leqslant 2^{N-1}\sigma^{-1}\int |d\mu| \,, \qquad \forall \sigma > 0 \,. \tag{6.8}$$

D'après (6.8) et d'après la majoration bien connue (valable pour tout E mesurable)

$$|E| \leqslant c(N)(\operatorname{cap}_1^* E)^{N/(N-1)} \,,$$

on obtient (6.7).

Jusqu'à la fin du numéro 9 nous supposerons que

$$\psi(x) = 0 \,, \tag{6.9}$$

et donc que les V_j sont définis avec cette condition.

Nous terminerons ce numéro en démontrant quelques majorations pour les fonctions des divers V_j, majorations qui sont indépendentes de l'inéquation variationelle (0.4); ces résultats sont contenus dans les deux prochains lemmes. Avant de les énoncer nous introduirons quelques notations:

Soient k un réel, ϱ un nombre positif, y un point de $\boldsymbol{R}^N$ et $v(x)$ une fonction définie sur Ω; on indiquera par $A(k, \varrho)$ et $B(k, \varrho)$ les sous-ensembles suivantes de $\Omega(y, \varrho)$:

$$A(k, \varrho) = \{x \in \Omega(y, \varrho) : v(x) \geqslant k\} \,,$$

$$B(k, \varrho) = \{x \in \Omega(y, \varrho) : v(x) \leqslant k\} \,.$$

On indiquera dans ces symboles le point y et la fonction $v(x)$ toutes fois que des possibilités de confusion se présentent.

(¹) Par $\operatorname{cap}_1^* E$ on indique la capacité interieure d'ordre 1 de l'ensemble E.

Soient ϱ et R deux nombres tels que $0<\varrho<R$ et y un point de $\boldsymbol{R}^N$; nous indiquerons par $\varphi(x)$ la fonction suivante:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } |x-y|\leqslant\varrho\,,\\ \dfrac{R-|x-y|}{R-\varrho} & \text{si } \varrho\leqslant|x-y|\leqslant R\,,\\ 0 & \text{si } R\leqslant|x-y|\,. \end{cases} \tag{6.10}$$

La fonction $\varphi(x)$ est lipschitzienne dans $\boldsymbol{R}^N$ et de support compact contenu dans la boule de centre y et rayon R; en outre son gradient est nul si $|x-y|>R$ ou $|x-y|<\varrho$; si x appartient à la couronne $\varrho<|x-y|<R$ alors

$$|\nabla\varphi(x)|=\frac{1}{R-\varrho}\,. \tag{6.11}$$

Démontrons maintenant le lemme suivant:

LEMME 6.4. – *Soit $v\in H^{1,\alpha}(\Omega)$, ϱ et R deux nombres tels que $0<\varrho<R$, y un point de $\overline{\Omega}$ et h et k deux nombres réels; alors les majorations suivantes ont lieu:*

Si $h<k$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{B(h,\varrho)}(h-v)^\alpha dx\leqslant c\left(\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int\limits_{B(k,R)}(k-v)^\alpha dx+\int\limits_{B(k)}|\nabla v|^\alpha\varphi^\alpha dx\right)|B(k,R)|^{\alpha/N},\\ \displaystyle |B(h,\varrho)|(h-k)^\alpha\leqslant c\left(\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int\limits_{B(k,R)}(k-v)^\alpha dx+\int\limits_{B(k)}|\nabla v|^\alpha\varphi^\alpha dx\right)|B(k,R)|^{\alpha/N}. \end{cases} \tag{6.12}$$

Si $h>k$,

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{A(h,\varrho)}(v-h)^\alpha dx\leqslant c\left(\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int\limits_{A(k,R)}(v-k)^\alpha dx+\int\limits_{A(k)}|\nabla v|^\alpha\varphi^\alpha dx\right)|A(k,R)|^{\alpha/N},\\ \displaystyle |A(h,\varrho)|(h-k)^\alpha\leqslant c\left(\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int\limits_{A(k,R)}(v-k)^\alpha dx+\int\limits_{A(k)}|\nabla v|^\alpha\varphi^\alpha dx\right)|A(k,R)|^{\alpha/N}. \end{cases} \tag{6.13}$$

DÉMONSTRATION. – Nous démontrerons d'abord (6.12). Soit $\varphi(x)$ la fonction définie dans (6.10) relative à ϱ, R et y et soit

$$w(x)=-\varphi(x)\min\left(v(x)-k,\,0\right)\,, \tag{6.14}$$

c'est à dire

$$w(x)=\begin{cases} -\varphi(x)(v(x)-k) & \text{si } v(x)\leqslant k\,,\\ 0 & \text{si } v(x)\geqslant k\,. \end{cases} \tag{6.15}$$

D'après l'observation 1.1 et en tenant compte de (1.3) $w \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ et

$$w_{x_i}(x) = \begin{cases} -\varphi_{x_i}(x)(v(x)-k) - \varphi(x)v_{x_i}(x) & \text{si } v(x) \leqslant k\,, \\ 0 & \text{si } v(x) \geqslant k\,; \end{cases} \tag{6.16}$$

en outre, w étant nulle dans le complémentaire par rapport à $\overline{\Omega}$ de $I(y, R)$, d'après le lemme 6.2 il s'ensuit que

$$\Big(\int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*}\varphi^{\alpha^*} dx\Big)^{1/\alpha^*} \leqslant c\Big(\int_{B(k)} ((k-v)|\nabla\varphi| + |\nabla v|\varphi)^\alpha dx\Big)^{1/\alpha}. \tag{6.17}$$

Dans (6.17) nous avons employé (6.15) et (6.16). En plus, d'après l'inégalité de HÖLDER on trouve

$$\Big(\int_{B(k)} (k-v)^\alpha\varphi^\alpha dx\Big)^{1/\alpha} \leqslant \int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*}\varphi^{\alpha^*} dx\Big)^{1/\alpha^*} |B(k, R)|^{1/\alpha - 1/\alpha^*}. \tag{6.18}$$

Finalement en rappelant les rélations (6.17) et (6.18) on déduit la majoration

$$\int_{B(h)} (h-v)^\alpha\varphi^\alpha dx \leqslant c\Big(\int_{B(k)} (k-v)^\alpha|\nabla\varphi|^\alpha dx + \int_{B(k)} |\nabla v|^\alpha\varphi^\alpha dx\Big)|B(k, R)|^{\alpha/N} \tag{6.19}$$

valable pour tout $h < k$; on observe que sous cette hypothèse on a

$$\int_{B(h)} (h-v)^\alpha\varphi^\alpha dx \leqslant \int_{B(k)} (k-v)^\alpha\varphi^\alpha dx\,.$$

D'autre part on a

$$|B(h, \varrho)|(k-h)^{\alpha^*} \leqslant \int_{B(k,\varrho)} (k-v)^{\alpha^*} dx \leqslant \int_{B(k)} (k-v)^{\alpha^*}\varphi^{\alpha^*} dx\,; \tag{6.20}$$

Les relations (6.20) et (6.17) entraînent

$$|B(h, \varrho)|^{1-\alpha/N}(k-h)^\alpha \leqslant c\Big(\int_{B(k)} (k-v)^\alpha|\nabla\varphi|^\alpha dx + \int_{B(k)} |\nabla v|^\alpha\varphi^\alpha dx\Big)\,. \tag{6.21}$$

Mais puisque $|B(h, \varrho)| \leqslant |B(k, \varrho)|$ on obtient d'après (6.21)

$$|B(h, \varrho)|(k-h)^\alpha \leqslant c\Big(\int_{B(k)} (k-v)^\alpha|\nabla\varphi|^\alpha dx + \int_{B(k)} |\nabla v|^\alpha\varphi^\alpha dx\Big)|B(k, R)|^{\alpha/N}. \tag{6.22}$$

Finalement les majorations (6.12) sont une conséquence immédiate des majorations (6.19) et (6.22) et de l'égalité (6.11).

On obtient (6.13) en appliquant (6.12) à la fonction $-v$ et aux nombres $-h$ et $-k$ (avec $h > k$).

Par commodité on pose

$$\delta(y) = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) ,$$

$$\delta_1(y) = \min(\varrho_0, \operatorname{dist}(y, \partial_1\Omega)) .$$

Considérons les hypothèses suivantes [1]:

(6.23′)

	$y \in$	$k \leqslant$	$4r <$	$v \in V_j,\ j =$	$\lvert A(k, 2r)\rvert \geqslant$
1.	$\partial\Omega$	0	ϱ_0	1, 4	—
2.	$\partial\Omega$	—	ϱ_0	2, 4	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$
3.	$\partial_1\Omega$	0	$\delta_1(y)$	3, 5	—
4.	Γ	0	ϱ_0	3, 5	—
5.	$\partial_2\Omega$	0	$\delta_1(y)$	5	—
6.	$\partial_2\Omega$	—	$\delta_1(y)$	3, 5	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$
7.	Ω	—	$\delta(y)$	$\forall$	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$

Il est évident que chacune des hypothèses de (6.23′) représente une hypothèse sur y, k, r et $v(x)$ seulement. De la même façon on interprète les hypothèses suivantes:

(6.24′)

	$y \in$	$k \geqslant$	$4r <$	$v \in V_j,\ j =$	$\lvert B(k, 2r)\rvert \geqslant$
1.	$\partial\Omega$	0	ϱ_0	1	—
2.	$\partial\Omega$	0	ϱ_0	4	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$
3.	$\partial\Omega$	—	ϱ_0	2	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$
4.	$\partial_1^0\Omega$	0	$\delta_1(y)$	3, 5	—
5.	Γ	0	ϱ_0	3, 5	—
6.	$\partial_2\Omega$	0	$\delta_1(y)$	5	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$
7.	$\partial_2\Omega$	—	$\delta_1(y)$	3	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$
8.	Ω	—	$\delta(y)$	$\forall$	$\frac{1}{2}\lvert\Omega(y, 2r)\rvert$

Démontrons maintenant le

LEMME 6.5. – *Si l'une des hypothèses (6.23′) est vérifiée alors la majoration suivante est valable:*

$$|B(h, 2r)|^{\alpha(N-1)/N} \leqslant \left(\frac{c}{k-h}\right)^{\alpha} (|B(k, 2r)| - |B(h, 2r)|)^{\alpha-1} \int\limits_{B(k,2r)} |\nabla v|^{\alpha} dx , \qquad \forall h < k . \tag{6.23}$$

---

[1] $j = 1, 4$ veut dire $j = 1$ ou $j = 4$, etc.

Si à son tour une des hypothèses (6.24′) *est vérifiée on a alors*:

$$|A(h,2r)|^{\alpha(N-1)/N} \leqslant \left(\frac{c}{k-h}\right)^{\alpha} (|A(k,2r)| - |A(h,2r|)^{\alpha-1} \int_{A(k,2r)} |\nabla v|^{\alpha} dx\,, \qquad \forall h > k\,. \tag{6.24}$$

DÉMONSTRATION. – Démontrons (6.23): supposons que y, k, r et $v(x)$ satisfont à l'une des hypothèses (6.23′) et posons

$$w = \{v\}_h - \{v\}_k \tag{6.25}$$

où $h < k$. La fonction $w(x)$ et ses dérivées sont donées par les expressions suivantes:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant v(x)\,, \\ v(x) - k & \text{si } h \leqslant v(x) \leqslant k\,, \\ h - k & \text{si } v(x) \leqslant h\,, \end{cases} \tag{6.26}$$

$$w_{x_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant v(x)\,, \\ v_{x_i}(x) & \text{si } h \leqslant v(x) \leqslant k\,, \\ 0 & \text{si } v(x) \leqslant h\,. \end{cases} \tag{6.27}$$

D'abord nous démontrons que $w(x)$ satisfait à la majoration (6.4), c'est à dire

$$|w(x)| \leqslant \gamma \int_{\Omega(y,2r)} \frac{|\nabla w(t)|}{|x-t|^{N-1}}\, dt \tag{6.28}$$

pour presque tous les $x \in \Omega(y, 2r)$; (6.28) est une simple conséquence du lemme 6.1: en effet supposons que (par exemple) la condition (6.23′.1) soit vérifiée; d'après le Lemme 1.3 on a $\{v\}_h = \{v\}_k = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est à dire, $w = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors le lemme 6.1*a*) entraîne (6.28). Si l'on suppose vérifiée une autre des Conditions (6.23′) la démonstration ne change pas essentiellement; si la condition verifiée est 2), 6) ou 7) on doit introduire une legère variante: supposons vérifiée (par exemple) (6.23′.6); alors

$$|A(k,2r)| \geqslant \tfrac{1}{2}|\Omega(y,2r)| \tag{6.29}$$

et en plus (Corollaire 1.4) il existe une ensemble fermé $E \subset A(k, 2r)$ tel que $|E| > 2^{-1} \cdot |A(k, 2r)|$ et que $\{v\}_k - v = \{v\}_h - v = 0$ sur E. Alors $w = 0$ sur E et, en rappelant (6.29), $|E| > 4^{-1}|\Omega(y, 2r)|$; finalement d'après le lemme 6.1 *a*) on obtient (6.28).

Ecrivons (6.28) sous la forme

$$|w(x)| \leqslant \gamma U_1^{\mu}(x) \tag{6.30}$$

où μ est la mesure de densité

$$\mu(t) = \begin{cases} |\nabla w(t)| & \text{si } t \in \Omega(y, 2r)\,, \\ 0 & \text{si } t \notin \Omega(y, 2r)\,. \end{cases} \tag{6.31}$$

Soit σ un nombre positif et appliquons le lemme 6.3 par rapport au potentiel $U_1^\mu(x)$ et au nombre σ/γ; nous obtenons

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^N : U_1^\mu(x) > \sigma/\gamma\}| \leqslant \left(\frac{c\gamma \int d\mu}{\sigma}\right)^{N/(N-1)}. \tag{6.32}$$

En outre d'après (6.30) il s'ensuit que

$$|\{x \in \Omega(y, 2r) \colon |w(x)| > \sigma\}| \leqslant |\{x \in \boldsymbol{R}^N : U_1^\mu(x) > \sigma/\gamma\}|; \tag{6.33}$$

Les relations (6.33), (6.32) et (6.31) entraînent

$$|\{x \in \Omega(y, 2r) : |w(x)| > \sigma\}| \leqslant \left(c\gamma\sigma^{-1} \int_{\Omega(y,2r)} |\nabla w(t)|\, dt\right)^{N/(N-1)}.$$

En posant $\sigma = k - h$ et en employant (6.27) on obtient

$$|\{x \in \Omega(y, 2r) : |w(x)| > k - h\}| \leqslant \left(c\gamma(k-h)^{-1} \int_{B(k,2r)-B(h,2r)} |\nabla v(t)|\, dt\right)^{N/(N-1)} \tag{6.34}$$

et puisque $B(h, 2r) \subset \{x \in \Omega(y, 2r) \colon |w(x)| > h - k\}$ on a

$$|B(h, 2r)| \leqslant \left(\frac{c\gamma}{h-k}\right)^{N/(N-1)} \left(\int_{B(k,2r)-B(h,2r)} |\nabla v(x)|\, dx\right)^{N/(N-1)}.$$

En prenant la puissance $\alpha(N-1)/N$ de la dernière inegalitè et en appliquant l'inégalité de HÖLDER on déduit finalement (6.23).

La démonstration de (6.24) est tout à fait analogue et nous la laissons aux soins du lecteur; dans ce cas on doit employer la fonction $w = \{v\}^h - \{v\}^k$ à la place de la fonction définie dans (6.25).

7. – Dans ce numéro nous démontrons une majoration intégrale pour le gradient des solutions; nous imposerons quelques restrictions artificielles qui seront supprimées plus tard.

Soit $u \in P_j$ et supposons que les majorations suivantes ont lieu:

$$\begin{cases} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \geqslant a |\nabla u|^\alpha - l(x) \\ |B(x, u, \nabla u)| \leqslant d(x) |\nabla u|^{\alpha-1} + f(x) \\ |A(x, u, \nabla u)| \leqslant a^{-1} |\nabla u|^{\alpha-1} + h(x)\,, \end{cases} \tag{7.1}$$

où $a > 0$ est une constante, et

$$(7.2)\qquad \begin{cases} l, f \in L^p(\Omega)\,, \\ h \in L^s(\Omega)\,, \\ d \in L^r(\Omega)\,; \end{cases}$$

on suppose que les exposantes p, s et r satisfont aux égalités

$$(7.2')\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{p} = \dfrac{\alpha}{N} - \varepsilon\,, \\[2mm] \dfrac{1}{s} = \dfrac{\alpha - 1}{N} - \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\,\varepsilon\,, \\[2mm] \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{N} - \dfrac{\varepsilon}{\alpha}\,, \end{cases}$$

où $0 < \varepsilon < \alpha/N$.

Imposons encore aux normes des fonctions de (7.2) les majorations

$$(7.3)\qquad \begin{cases} \|l\|_p \leqslant 1\,, \\ \|f\|_q \leqslant 1\,, \\ \|h\|_s \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Si $u(x)$ appartient à $L^\infty(\Omega)$ on pose par commodité $S(u) = \|u\|_\infty$; s'il n'y a pas de danger de confusion nous indiquerons $S(u)$ plus simplement par S.

Dans ce numéro et dans le suivant nous supposons que la solution $u(x)$ que nous considérons satisfait les deux majorations suivantes:

$$(7.4)\qquad S = S(u) \leqslant 1\,;$$

$$(7.5)\qquad S(u)\,\|d\|_r \leqslant 1\,.$$

Les conditions (7.3), (7.4) et (7.5) seront supprimées dans le numéro 9.

THÉORÈME 7.1. – *Soit u une solution du problème P_j et supposons que les hypothèses* (7.1) ... (7.5) *aient lieu. Si, en plus, une des hypothèses suivantes est verifiée*

$$(7.6')\qquad \begin{array}{l|lllll} & & y \in & k \leqslant & R < & u \in P_j,\ j = \\ & 1. & \partial\Omega & 0 & \varrho_0 & 1 \\ & 2. & \partial\Omega & S & \varrho_0 & 2,\ 4 \\ & 3. & \partial_1\Omega & 0 & \varrho_0 & 3,\ 5 \\ & 4. & \partial_2\Omega & S & \delta_1(y) & 3,\ 5 \\ & 5. & \Omega & S & \delta(y) & \forall \end{array}$$

alors la majoration

$$\int\limits_{B(k)} |\nabla u|^\alpha \varphi^\alpha dx \leq c \frac{1}{(R-\varrho)^\alpha} \int\limits_{B(k,R)} (k-u)^\alpha dx + |B(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon} \tag{7.6}$$

est valable.

Si, par contre, une des hypothèses suivantes est vérifiée

(7.7′)

	$y \in$	$k \geq$	$R <$	$u \in P_j,\ j =$
1.	$\partial\Omega$	0	ϱ_0	1, 4
2.	$\partial\Omega$	$-S$	ϱ_0	2
3.	$\partial_1\Omega$	0	ϱ_0	3, 5
4.	$\partial_2\Omega$	0	$\delta_1(y)$	5
5.	$\partial_2\Omega$	$-S$	$\delta_1(y)$	3
6.	Ω	$-S$	$\delta(y)$	$\forall$

on a

$$\int\limits_{A(k)} |\nabla u|^\alpha \varphi^\alpha dx \leq c \frac{1}{(R-\varrho)^\alpha} \int\limits_{A(k,R)} (u-k)^\alpha dx + |A(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}\,; \tag{7.7}$$

nous indiquons par ϱ *un nombre tel que* $0 < \varrho < R$.

DÉMONSTRATION. – Soit $u \in P_j$ et supposons que y, k et R satisfont à l'une des hypothèses (7.6′); on pose

$$v(x) = u(x) - \varphi(x)^\alpha \min\,(u(x)-k,\ 0) \tag{7.8}$$

où $\varphi(x)$ est définie par rapport aux valeurs y, ϱ et R considérés. On vérifie aisément que $v \in V_j$ et que

$$(v-u)(x) = \begin{cases} -\varphi(x)^\alpha (u(x)-k) & \text{si } u(x) \leq k\,; \\ 0 & \text{si } u(x) \geq k\,. \end{cases} \tag{7.9}$$

$$(v-u)_{x_i}(x) = \begin{cases} -\alpha\varphi(x)^{\alpha-1}\varphi_{x_i}(x)(u(x)-k) - \varphi(x)^\alpha u_{x_i}(x) & \text{si } u(x) \leq k\,, \\ 0 & \text{si } u(x) \geq k\,. \end{cases} \tag{7.10}$$

D'après (0.4), (7.9) et (7.10) on déduit que

$$\int\limits_{B(k)} A(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi^\alpha dx \leq \alpha \int\limits_{B(k)} |A(x,u,\nabla u)|(k-u)|\nabla\varphi|\varphi^{\alpha-1} dx + \\ + \int\limits_{B(k)} |B(x,u,\nabla u)|(k-u)\varphi^\alpha dx\,. \tag{7.11}$$

En utilisant dans (7.11) les hypothèses (7.1) nous obtenons

$$(7.12)\qquad a\int_{B(k)}|\nabla u|^{\alpha}\varphi^{\alpha}\,dx\leqslant \alpha a^{-1}\int_{B(k)}|\nabla u|^{\alpha-1}(k-u)|\nabla\varphi|\varphi^{\alpha-1}\,dx+$$
$$+\alpha\int_{B(k)}(k-u)h|\nabla\varphi|\varphi^{\alpha-1}\,dx+\int_{B(k)}l\varphi^{\alpha}\,dx+\int_{B(k)}|\nabla u|^{\alpha-1}(k-u)\,d\varphi^{\alpha}\,dx+\int_{B(k)}(k-u)f\varphi^{\alpha}\,dx\,.$$

Maintenant on va majorer d'une façon adéquate les divers termes au deuxième membre de (7.12); on démontrera les majorations suivantes:

$$(7.13)\qquad \alpha a^{-1}\int_{B(k)}|\nabla u|^{\alpha-1}(k-u)|\nabla\varphi|\varphi^{\alpha-1}\,dx\leqslant \alpha a^{-1}\Big(\int_{B(k)}|\nabla u|^{\alpha}\varphi^{\alpha}\,dx\Big)^{(\alpha-1)/\alpha}\cdot$$
$$\cdot\Big(\int_{B(k)}(k-u)^{\alpha}|\nabla\varphi|^{\alpha}\,dx\Big)^{1/\alpha};$$

$$(7.14)\qquad \alpha\int_{B(k)}(k-u)h|\nabla\varphi|\varphi^{\alpha-1}\,dx\leqslant\Big(\int_{B(k)}(k-u)^{\alpha}|\nabla\varphi|^{\alpha}\,dx\Big)^{1/\alpha}\big(|B(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}\big)^{(\alpha-1)/\alpha};$$

$$(7.15)\qquad \int_{B(k)}l\varphi^{\alpha}\,dx\leqslant|B(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon};$$

$$(7.16)\qquad \int_{B(k)}(k-u)f\varphi^{\alpha}\,dx\leqslant 2|B(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon};$$

$$(7.17)\qquad \int_{B(k)}|\nabla u|^{\alpha-1}(k-u)\,d\varphi^{\alpha}\,dx\leqslant 2\Big(\int_{B(k)}|\nabla u|^{\alpha}\varphi^{\alpha}\,dx\Big)^{(\alpha-1)/\alpha}\big(|B(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}\big)^{1/\alpha}.$$

La relation (7.13) est une conséquence immédiate de l'inégalité de HÖLDER. Pour démontrer (7.14) on applique l'inégalité de HÖLDER à son premier membre, en obtenant alors:

$$(7.18)\qquad \alpha\int_{B(k)}(k-u)h|\nabla\varphi|\varphi^{\alpha-1}\,dx\leqslant\alpha\Big(\int_{B(k)}(k-u)^{\alpha}|\nabla\varphi|^{\alpha}\,dx\Big)^{1/\alpha}\Big(\int_{B(k)}h^{\alpha/(\alpha-1)}\varphi^{\alpha}\,dx\Big)^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

En outre d'après le hypothèses (7.2), (7.2′) et (7.3) on a

$$(7.19)\qquad \int_{B(k)}h^{\alpha/(\alpha-1)}\varphi^{\alpha}\,dx\leqslant\int_{B(k,R)}h^{\alpha/(\alpha-1)}\,dx\leqslant|B(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon};$$

(7.18) et (7.19) entraînent (7.14).

L'inégalité (7.15) s'obtient de la même façon d'après les hypothèses (7.2), (7.2′) et (7.3).

Démontrons maintenant (7.16): on peut écrire

$$(7.20)\qquad \int_{B(k)}(k-u)f\varphi^{\alpha}\,dx\leqslant 2S\int_{B(k)}f\varphi^{\alpha}\,dx$$

car d'après les hypothèses sur k, $k < -S$ ou $|k| \leqslant S$; dans le premier cas on a $|B(k_0)| = 0$; dans le deuxième cas on a $|u(x) - k| \leqslant 2S$ presque partout dans Ω. En employant (7.2) ... (7.4) on obtient d'après (7.20) la majoration (7.16).

Démontrons finalement (7.17): en raisonnant comme précédemment on démontre que

$$\int_{B(k)} |\nabla u|^{\alpha-1}(k-u)\, d\varphi^\alpha\, dx \leqslant 2S \Big(\int_{B(k)} |\nabla u|^\alpha \varphi^\alpha\, dx \Big)^{(\alpha-1)/\alpha} \Big(\int_{B(k)} d^\alpha \varphi^\alpha\, dx \Big)^{1/\alpha}; \tag{7.21}$$

d'après (7.21) et les hypothèses (7.2), (7.2′), (7.3) et (7.5) il s'ensuit (7.17).

Par commodité nous posons:

$$\begin{cases} A = \displaystyle\int_{B(k)} |\nabla u|^\alpha \varphi^\alpha\, dx\,, \\ B = |B(k, R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}, \\ C = \displaystyle\int_{B(k)} (k-u)^\alpha |\nabla\varphi|^\alpha\, dx\,. \end{cases} \tag{7.22}$$

En majorant les termes du deuxième membre de (7.13) avec (7.14) ... (7.18) on obtient

$$aA \leqslant \alpha a^{-1} A^{(\alpha-1)/\alpha} C^{1/\alpha} + \alpha C^{1/\alpha} B^{(\alpha-1)/\alpha} + 3B + 2A^{(\alpha-1)/\alpha} B^{1/\alpha}\,. \tag{7.23}$$

Alors une au moins des inegalitées suivantes doit être valable:

$$\begin{cases} aA \leqslant 4\alpha a^{-1} A^{(\alpha-1)/\alpha} C^{1/\alpha}\,, \\ aA \leqslant 4\alpha C^{1/\alpha} B^{(\alpha-1)/\alpha}\,, \\ aA \leqslant 12B\,; \\ aA \leqslant 8A^{(\alpha-1)/\alpha} B^{1/\alpha}\,; \end{cases} \tag{7.24}$$

les (7.24) peuvent s'écrire de façon équivalente

$$\begin{cases} A \leqslant cC\,, \\ A \leqslant c(B + C)\,, \\ A \leqslant cB\,, \\ A \leqslant cB\,, \end{cases} \tag{7.25}$$

et l'une des (7.25) étant valable, la majoration

$$A \leqslant c(B + C) \tag{7.26}$$

a lieu. Finalement en remplaçant dans (7.26) A, B et C par les valeurs données dans (7.22) et en employant la majoration

$$\int_{B(k)} (k-u)^\alpha |\nabla\varphi|^\alpha dx \leqslant \frac{1}{(R-\varrho)^\alpha} \int_{B(k,R)} (k-u)^\alpha dx$$

on obtient (7.6).

On démontre (7.7) d'une façon analogue; nous laissons les détails au lecteur, en remarquant que dans ce cas on doit employer la fonction $v(x) = u(x) - \varphi(x)^\alpha \max(u(x)-k, 0)$ au lieu de la fonction (7.8).

Le prochain lemme est une conséquence immédiate du lemme 6.4 et du théorème 7.1:

LEMME 7.1. – *Supposons que les hypothèses* (7.1) ... (7.5) *aient lieu. Alors les deux résultats suivants sont valables:*

i) *si est vérifiée une des conditions* (7.6′) *et si* $\varrho < R$ *alors on a*

$$\int_{B(h,\varrho)} (h-u)^\alpha dx \leqslant c\left\{\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{B(k,R)} (k-u)^\alpha dx + |B(k\,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}\right\}|B(k,R)|^{\alpha/N}, \quad \forall h<k\,; \tag{7.27}$$

$$|B(h,\varrho)|\,(k-h)^\alpha \leqslant c\left\{\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{B(k,R)} (k-u)^\alpha dx + |B(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}\right\}|B(k,R)|^{\alpha/N}, \quad \forall h<k\,. \tag{7.27′}$$

ii) *si l'une des conditions* (7.7′) *est vérifiée et si* $\varrho < R$ *on a*

$$\int_{A(h,\varrho)} (u-h)^\alpha dx \leqslant c\left\{\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{A(k,R)} (u-k)^\alpha dx + |A(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}\right\}|A(k,R)|^{\alpha/N}, \quad \forall h>k\,; \tag{7.28}$$

$$|A(h,\varrho)|\,(h-k)^\alpha \leqslant c\left\{\frac{1}{(R-\varrho)^\alpha}\int_{A(k,R)} (u-k)^\alpha dx + |A(k,R)|^{1-\alpha/N+\varepsilon}\right\}|A(k,R)|^{\alpha/N}, \quad \forall h>k\,. \tag{7.28′}$$

Le lemme suivant est une simple conséquece du théorème 7.1 et du lemme 6.5:

LEMME 7.2. – *Soit* $u \in P_j$ *et supposons que les hypotheses* (7.1) ... (7.5) *sont vérifiées. Alors les deux affirmations suivantes sont valables:*

i) *si* y, k, r *et* $u(x)$ *vérifient une des conditions* (6.23′) *et si* $k \leqslant S$ *on a:*

$$\begin{aligned} &|B(h,2r)|^{\alpha(N-1)/N} \leqslant \\ &\leqslant \frac{c}{(k-h)^\alpha}\left(\frac{1}{(2r)^\alpha}\int_{B(k,4r)} (k-u)^\alpha dx + r^{N-\alpha+\varepsilon N}\right)(|B(k,2r)| - |B(h,2r)|)^{\alpha-1}, \quad \forall h<k\,. \end{aligned} \tag{7.31}$$

ii) *si* y, k, r *et* $u(x)$ *vérifient une des conditions* (6.24′) *et si* $k \geq -S$, *on a*:

$$|A(h, 2r)|^{\alpha(N-1)/N} \leq \tag{7.32}$$

$$\leq \frac{c}{(h-k)^\alpha}\left(\frac{1}{(2r)^\alpha}\int\limits_{A(k,4r)}(u-k)^\alpha\,dx + r^{N-\alpha+\varepsilon N}\right)(|A(k,2r)| - |A(h,2r)|)^{\alpha-1}, \qquad \forall h > k\,.$$

DÉMONSTRATION. - Démontrons i): d'après le lemme 6.5 la relation (6.23) est valable. En outre on voit facilement que y, k, $R = 4r$ et $u(x)$ satisfont aussi à l'une des hypothèses (7.6′); en appliquant le théorème 7.1 on obtient (7.6) avec ϱ et R donnés par $2r$ et $4r$ respectivement; finalement d'après (6.23) et (7.6) il s'ensuit (7.31).

D'une façon analogue on démontre ii).

8. - Nous démontrons d'abord le lemme algébrique suivant:

LEMME 8.1. - *Soit* $\{\chi_m\}$, $m \geq 0$, *une suite de nombres réels non négatifs tels que*

$$\chi_{m+1} \leq A\,\frac{d^\alpha}{R^\alpha}\left(2^{\alpha m}\frac{\chi_m}{d^\alpha}\right)^{1+\alpha/N} + B\left(2^{\alpha m}\frac{\chi_m}{d^\alpha}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad \forall m \geq 0\,, \tag{8.1}$$

où A, B, d, R, α, N, ε *sont des constantes positives et*

$$\varepsilon \leq \frac{\alpha}{N}\,. \tag{8.2}$$

Soient ν *et* θ *deux nombres ainsi définis*:

$$\nu = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,; \qquad \theta^{\alpha/N} = A\cdot 2^{\alpha\nu+1}\,. \tag{8.3}$$

Alors si d *satisfait à l'inégalité*

$$d^\alpha \geq \theta\,\frac{\chi_0}{R^N} + \theta^{-\varepsilon}B\cdot 2^{\alpha\nu+1}R^{N\varepsilon} \tag{8.4}$$

on a

$$\chi_m \leq \theta^{-1}\,\frac{d^\alpha R^N}{2^{\alpha m\nu}}\,, \qquad \forall m \geq 0\,. \tag{8.5}$$

DÉMONSTRATION. - Démontrons (8.5) par recurrence; pour $m = 0$ (8.5) c'est une simple conséquence de (8.4). Nous admettons que l'inégalité (8.5) est vraie pour la valeur m de l'indice et nous la démontrons pour la valeur $m+1$:

D'après (8.1) et (8.5) il s'ensuit

$$\chi_{m+1} \leqslant A \frac{d^\alpha}{R^\alpha} 2^{\alpha m(1+\alpha/N)(1-\nu)} \theta^{-(1+\alpha/N)} R^{N(1+\alpha/N)} + B \cdot 2^{\alpha m(1+\varepsilon)(1-\nu)} \theta^{-(1+\varepsilon)} R^{N(1+\varepsilon)},$$

et ainsi, afin que l'inégalité (8.5) soit valable pour $m+1$ il est suffisant que

$$\text{(8.6)} \quad \left\{ \begin{aligned} & A \frac{d^\alpha}{R^\alpha} 2^{\alpha m(1+\alpha/N)(1-\nu)} \theta^{-(1+\alpha/N)} R^{N(1+\alpha/N)} \leqslant \frac{1}{2} \theta^{-1} \frac{d^\alpha R^N}{2^{\alpha(m+1)\nu}}, \\ & B \cdot 2^{\alpha m(1+\varepsilon)(1-\nu)} \theta^{-(1+\varepsilon)} R^{N(1+\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{2} \theta^{-1} \frac{d^\alpha R^N}{2^{\alpha(m+1)\nu}}. \end{aligned} \right.$$

Démontrons (8.6): (8.6.1) est équivalent à l'inégalité

$$\text{(8.7)} \qquad A \cdot 2^{\alpha m[(1+\alpha/N)(1-\nu)+\nu]} \cdot 2^{\alpha\nu+1} \leqslant \theta^{\alpha/N};$$

d'après (8.2) et la définition de ν nous concluons que $(1+a/N)(1-\nu)+\nu \leqslant 0$; cette inégalité et la définition de θ entraînent (8.7), c'est à dire que (8.6.1) est valable.

Par contre (8.6.2) est equivalent à

$$B \cdot 2^{\alpha m[(1+\varepsilon)-\nu(1+\varepsilon)+\nu]} \cdot 2^{\alpha\nu+1} \theta^{-\varepsilon} R^{N\varepsilon} \leqslant d^\alpha;$$

et cette inégalité a lieu comme conséquence de (8.4) et de l'identité $(1+\varepsilon)-\nu(1+\varepsilon)+$ $+\nu=0$.

Le lemme précédent nous sera utile pour démontrer le

LEMME 8.2. – *Soit $u \in P_j$ et supposons que les hypotheses (7.1) ... (7.5) aient lieu. Dans ces conditions il existent deux constantes positives λ_1 et λ_2 telles que:*

i) *si y, k, $R=2r$ et $u(x)$ satisfont à l'une des hypothèses (7.6′) et si d est un réel tel que*

$$\text{(8.8′)} \qquad d^\alpha \geqslant \frac{\lambda_1}{(2r)^N} \int_{B(k,2r)} (k-u)^\alpha\, dx + \lambda_2 (2r)^{N\varepsilon}$$

alors

$$\text{(8.8)} \qquad \left| B\left(k-\frac{d}{2}, r\right) \right| = 0\,.$$

ii) *si y, k, $R=2r$ et $\vartheta(x)$ satisfont à l'une des hypothèses (7.7′) et si d est tel que*

$$\text{(8.9′)} \qquad d^\alpha \geqslant \frac{\lambda_1}{(2r)^N} \int_{A(k,2r)} (u-k)^\alpha\, dx + \lambda_2 (2r)^{N\varepsilon}$$

alors

$$(8.9)\qquad \left|A\left(k+\frac{d}{2},r\right)\right|=0\,.$$

Le nombre ε *est celui de* (7.2′).

DÉMONSTRATION. – Supposons que y, k, $R=2r$ et $u(x)$ satisfont à l'une des conditions (7.6′); posons

$$(8.10)\qquad \begin{cases} \varrho_m = r+\dfrac{r}{2^m}\,,\\[2mm] k_m = k-\dfrac{d}{2}+\dfrac{d}{2^{m+1}}\,,\end{cases}$$

où d est une constante positive que nous préciserons par la suite et m est un indice entier non négatif; soient a_m et u_m donnés par

$$(8.11)\qquad \begin{cases} a_m = |B(k_m,\varrho_m)|\,,\\ u_m = \displaystyle\int\limits_{B(k_m,\varrho_m)}(k_m-u)^\alpha\,dx\,.\end{cases}$$

Remarquons d'abord que le lemme 7.1 est applicabile avec h, k, ϱ et R remplacés respectivement par k_{m+1}, k_m, ϱ_{m+1} et ϱ_m: en effet y, k, $R=2r$ et $u(x)$ satisfont (par hypothèse) à l'une des conditions (7.6′); alors y, k_m, ϱ_m et $u(x)$ satisfont à la même condition car $k_m\leqslant k$ et $\varrho_m\leqslant 2r$; puisque $k_{m+1}<k_m$ et $\varrho_{m+1}<\varrho_m$ on a ainsi démontré l'affirmation.

En appliquant (7.27) et (7.27′) avec h, k, ϱ et R remplacés par les valeurs indiquées nous obtenons

$$(8.14)\qquad \begin{cases} u_{m+1}\leqslant c\left(\dfrac{2^{\alpha(m+2)}}{(2r)^\alpha}\,u_m a_m^{\alpha/N}+a_m^{1+\varepsilon}\right),\\[3mm] a_{m+1}\leqslant c\,\dfrac{2^{\alpha(m+2)}}{d^\alpha}\left(\dfrac{2^{\alpha(m+2)}}{(2r)^\alpha}\,u_m a_m^{\alpha/N}+a_m^{1+\varepsilon}\right);\end{cases}$$

En définissant maintenant (pour tout indice m non négatif) le nombre

$$(8.15)\qquad \chi_m=\frac{2^{\alpha(m+2)}}{(2r)^\alpha}\,u_m a_m^{\alpha/N}+a_m^{1+\varepsilon}\,,$$

les majorations (8.14) peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$(8.16)\qquad \begin{cases} u_{m+1}\leqslant c\chi_m\,,\\[2mm] a_{m+1}\leqslant c\,\dfrac{2^{\alpha(m+2)}}{d^\alpha}\,\chi_m\,.\end{cases}$$

D'après (8.15) et (8.16) il s'ensuit que

$$\chi_{m+1} \leqslant A \frac{d^\alpha}{(2r)^\alpha} \left[\frac{2^{\alpha m}}{d^\alpha} \chi_m\right]^{1+\alpha/N} + B \left[\frac{2^{\alpha m}}{d^\alpha} \chi_m\right]^{1+\varepsilon}, \tag{8.17}$$

où A et B sont des constantes.

Soient maintenant θ et ν les nombres définis dans (8.3), où α, ε et A on la signification actuelle, et posons

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2^{2\alpha} \theta V_N^{\alpha/N}, \\ \lambda_2 = \theta V_N^{1+\varepsilon} + \theta^{-\varepsilon} B\, 2^{\alpha\nu+1}; \end{cases} \tag{8.18}$$

supposons que d satisfait (8.8'); d'après (8.15), (8.10) et (8.11) il s'ensuit

$$\chi_0 \leqslant 2^{2\alpha} V_N^{\alpha/N} \int_{B(k,2r)} (k-u)^\alpha dx + V_N^{1+\varepsilon} (2r)^{N+N\varepsilon}. \tag{8.19}$$

La rélation (8.19) entraîne que

$$\theta \frac{\chi_0}{(2r)^N} + \theta^{-\varepsilon} B 2^{\alpha\nu+1} (2r)^{N\varepsilon} \leqslant 2^{2\alpha} \theta V_N^{\alpha/N} \frac{1}{(2r)^N} \int_{B(k,2r)} (k-u)^\alpha dx + \\ + (\theta V_N^{1+\varepsilon} + \theta^{-\varepsilon} B 2^{\alpha\nu+1})(2r)^{N\varepsilon}; \tag{8.20}$$

d'après (8.20), (8.18) et (8.8') on conclue que d satisfait à (8.4). Puisque (8.4) et (8.17) sont vérifiées on applique le lemme 8.1 et on obtient

$$\chi_m \leqslant \theta^{-1} \frac{d^\alpha (2r)^N}{2^{\alpha m \nu}}, \qquad \forall m \geqslant 0.$$

Cette dernière inegalité et (8.16) entraînent alors

$$a_{m+1} \leqslant c\theta^{-1} (2r)^N 2^{\alpha m(1-\nu)+2\alpha}; \tag{8.21}$$

en passant à la limite dans (8.21) il s'ensuit que

$$\lim_{m\to+\infty} a_m = 0. \tag{8.22}$$

D'autre part, les définitions implient que

$$\left| B\left(k - \frac{d}{2}, r\right) \right| \leqslant a_m, \qquad \forall m \geqslant 0; \tag{8.23}$$

finalement en utilisant (8.22) et (8.23) on obtient (8.8).

La deuxième partie du lemme se démontre d'une façon analogue.

Avant de énoncer le prochain théorème introduisons quelques notations et quelques remarques: Si $f(x)$ est une fonction mesurable définie sur un ensemble mesurable A, on indiquera par $\omega(f, A)$ l'oscillation de f dans A, c'est à dire

$$\omega(f, A) = \operatorname*{Sup}_A f(x) - \operatorname*{Inf}_A f(x);$$

on indiquera quelquefois par $\omega_y(f, \varrho)$, $\omega(f, \varrho)$ ou seulement $\omega(\varrho)$ l'oscillation $\omega(f, \Omega(y, \varrho))$.

REMARQUE 8.1. – *Si y, r et $u(x)$ satisfont à l'une des conditions* (8.25) (*voir plus loin*) *et si k est un nombre réel arbitraire alors y, k, r et $u(x)$ satisfont à l'une des conditions* (6.23′) *ou* (6.24′).

DÉMONSTRATION. – Nous vérifierons la thèse en supposant que l'hypothèse (8.25.1) est valable, et nous laissons la démonstration des autres cas aux soins du lecteur:

Si $j = 1$ et $k \leqslant 0$ alors (6.23′.1) est vérifiée; si par contre $k > 0$, (6.24′.1) est vérifiée.

Si $j = 2$ on a $|A(k, 2r)| \geqslant 2^{-1}|\Omega(y, 2r)|$ ou $|B(k, 2r)| > 2^{-1}|\Omega(y, 2r)|$; dans le premier cas (6.23′.2) est vérifiée et dans le deuxième cas on a (6.24′.3).

Si $j = 4$ et $k \leqslant 0$ (6.23′.1) est valable; si par contre $k > 0$ on a (6.23′.2) ou (6.24′.2) selon qu'il est $|A(k, 2r)| \geqslant 2^{-1}|\Omega(y, 2r)|$ ou $|B(k, 2r)| > 2^{-1}|\Omega(y, 2r)|$.

Démontrons maintenant le théorème suivante:

THÉORÈME 8.1. – *Soit $u(x)$ une solution du probléme P_j et supposons que les hypothéses* (7.1) ... (7.5) *ont lieu. Si, en outre, une des hypothéses suivantes est valable*

$$(8.25)\qquad \left|\begin{array}{llll} & y \in & 4r < & u \in P_j,\ j = \\ 1. & \partial\Omega & \varrho_0 & 1, 2, 4 \\ 2. & \partial_1^0\Omega & \delta_1(y) & 3, 5 \\ 3. & \Gamma & \varrho_0 & 3, 5 \\ 4. & \partial_2\Omega & \delta_1(y) & 3, 5 \\ 5. & \Omega & \delta(y) & \forall \end{array}\right.$$

alors la majoration

$$(8.26)\qquad \omega(u, r) \leqslant \eta\, \omega(u, 4r) + \Lambda r^\theta$$

a lieu; η, Λ et θ sont des constantes positives; en outre $\eta < 1$.

DÉMONSTRATION. – La démonstration est fondée essentiellement sur les lemmes 7.2 et 8.2. Définissons l_1 et l_2 comme suit:

$$(8.27)\qquad \begin{cases} l_1 = \operatorname{Sup} u(x) & \text{dans } \Omega(y, 4r), \\ l_2 = \operatorname{Inf} u(x) & \text{dans } \Omega(y, 4r); \end{cases}$$

posons encore

$$\omega = l_1 - l_2 = \omega(u, 4r)\,, \tag{8.28}$$

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2}{2}\,. \tag{8.29}$$

On a évidemment

$$-S \leqslant l_2 \leqslant \bar{l} \leqslant l_1 \leqslant S\,. \tag{8.30}$$

D'après la remarque 8.1 y, $\bar{l}$, r et $u(x)$ doivent vérifier une des hypothèses (6.23′) ou (6.24′); supposons d'abord qu'ils vérifient une des hypothèses (6.23′) et definissons pour tout indice j non négatif les nombres

$$\eta_j = \frac{1}{2^{j+1}}\,, \qquad k_j = l_2 + \eta_j \omega\,; \tag{8.31}$$

posons encore

$$b_j = |B(k_j, 2r)|\,. \tag{8.32}$$

La majoration (7.31), avec h et k donnés par k_{j+1} et k_j respectivement, s'écrit

$$b_{j+1}^{\alpha(N-1)/N} \leqslant c\, \frac{2^{\alpha(j+2)}}{\omega^\alpha} \left(\frac{1}{(2r)^\alpha} \int\limits_{B(k_j,4r)} (k_j - u)^\alpha\, dx + r^{N-\alpha+N\varepsilon} \right) (b_j - b_{j+1})^{\alpha-1}\,. \tag{8.33}$$

Mais puisque

$$k_j - u(x) \leqslant k_j - l_2 = \frac{\omega}{2^{j+1}}$$

pour presque tous les $x \in B(k_j, 4r)$, on obtient d'après (8.33)

$$b_{j+1}^{\alpha(N-1)/N} \leqslant c\, \frac{2^{\alpha(j+2)}}{\omega^\alpha} \left(\frac{\omega^\alpha}{2^{\alpha(j+1)}} \frac{(4r)^N}{(2r)^\alpha} V_N + r^{N-\alpha+N\nu} \right) (b_j - b_{j+1})^{\alpha-1}\,;$$

cette dernière relation entraîne

$$b_{j+1}^{\alpha(N-1)/N(\alpha-1)} \leqslant c_1^{1/(\alpha-1)} r^{(N-\alpha)/(\alpha-1)} \left[1 + \left(2^{j+1} \frac{r^{N\varepsilon/\alpha}}{\omega} \right)^\alpha \right]^{1/(\alpha-1)} (b_j - b_{j+1})\,. \tag{8.34}$$

Indiquons par n_0 le plus petit entier positif tel que

$$n_0 \geqslant V_N 2^{(\alpha+1-N)/(\alpha-1)} c_1^{1/(\alpha-1)} \lambda_1^{\alpha(N-1)/N(\alpha-1)} \tag{8.35}$$

où c_1 est la constante de (8.34); alors une des deux hypothèses suivantes est vérifiée:

$$\text{j)}\quad \omega \leqslant 2^{n_0+1} r^{N\varepsilon/\alpha}\,,$$

$$\text{jj)}\quad \omega > 2^{n_0+1} r^{N\varepsilon/\alpha}\,.$$

Si l'hypothèse j) est vérifiée alors la relation (8.26) est évidemment valable pour $\eta = 0$.

Supposons, par contre, que soit vérifiée jj); alors

$$\frac{2^{j+1} r^{N\varepsilon/\alpha}}{\omega} < 1, \qquad \forall\, 0 \leqslant j \leqslant n_0 . \tag{8.36}$$

En outre, puisque la suite $\{b_j\}$ est decroissante, on obtient d'après (8.34) et (8.36)

$$b_{n_0}^{\alpha(N-1)/N(\alpha-1)} \leqslant b_{j+1}^{\alpha(N-1)/N(\alpha-1)} \leqslant (2c_1)^{1/(\alpha-1)} r^{(N-\alpha)/(\alpha-1)}(b_j - b_{j+1}), \qquad \forall 0 \leqslant j \leqslant n_0 - 1. \tag{8.37}$$

D'après (8.37) on obtient facilement

$$n_0 b_{n_0}^{\alpha(N-1)/N(\alpha-1)} \leqslant (2c_1)^{1/(\alpha-1)} r^{(N-\alpha)/(\alpha-1)} \sum_{j=0}^{n_0-1} (b_j - b_{j+1}) \leqslant V_N (2c_1)^{1/(\alpha-1)} 2^{(\alpha-N)/(\alpha-1)} (2r)^{\alpha(N-1)/(\alpha-1)} ,$$

et en se rappelant (8.35), il s'ensuit que

$$b_{n_0} \leqslant \frac{2^N}{\lambda_1} r^N . \tag{8.38}$$

D'autre part puisque y, $\bar{l}$, $R = 2r$ et $u(x)$ satisfont à l'une des conditions (7.6′), y, $l_2 + \eta_{n_0}\omega$, $R = 2r$ et $u(x)$ satisfont à la même condition; en appliquant alors le lemme 8.2 i) on obtient

$$\left| B\left(l_2 + \eta_{n_0}\omega - \frac{d}{2}, r\right) \right| = 0 \tag{8.39}$$

pour tout d telle que

$$d^\alpha \geqslant \frac{\lambda_1}{(2r)^N} \int_{B(l_2+\eta_{n_0}\omega, 2r)} (l_2 + \eta_{n_0}\omega - u)^\alpha dx + \lambda_2 (2r)^{N\varepsilon} . \tag{8.40}$$

En rappelant (8.27) et (8.38) on voit que la valeur

$$d = \eta_{n_0}\omega + \lambda_2^{1/\alpha}(2r)^{N\varepsilon/\alpha} . \tag{8.41}$$

vérifie (8.40). Finalement d'après (8.39) et (8.41) on déduit que

$$u(x) \geqslant l_2 + \tfrac{1}{2}\eta_{n_0}\omega - \tfrac{1}{2}\lambda_2^{1/\alpha}(2r)^{N\varepsilon/\alpha} \tag{8.42}$$

pour presque tous les points $x \in \Omega(y, r)$; cette dernière inégalité avec (8.27) et (8.28) entraîne

$$\omega(u, r) \leqslant (1 - \tfrac{1}{2}\eta_{n_0})\omega + \tfrac{1}{2}\lambda_2^{1/\alpha}(2r)^{N\varepsilon/\alpha} .$$

La thèse est ainsi démontré dans le cas où y, $\bar{l}$, r et $u(x)$ vérifient une des conditions (6.23').

Supposons maintenant que y, $\bar{l}$, r et $u(x)$ vérifient une des hypothèses (6.24') et posons pour $j \geqslant 0$

$$\eta_j = \frac{1}{2^{j+1}}, \qquad k_j = l_1 - \eta_j \omega, \tag{8.43}$$

$$b_j = |A(k_j, 2r)|. \tag{8.44}$$

En appliquant (7.32) avec $h = k_{j+1}$ et $k = k_j$ on obtient

$$b_{j+1}^{\alpha(N-1)/N} \leqslant c \frac{2^{\alpha(j+2)}}{\omega^\alpha} \left(\frac{1}{(2r)^\alpha} \int\limits_{A(k_j, 4r)} (u - k_j)^\alpha dx + r^{N-\alpha+N\varepsilon} \right) (b_j - b_{j+1})^{\alpha-1}; \tag{8.45}$$

d'après (8.45) il s'ensuit

$$b_{j+1}^{\alpha(N-1)/N} \leqslant c_1 r^{N-\alpha} \left[1 + \left(2^{j+1} \frac{r^{N\varepsilon/\alpha}}{\omega} \right)^\alpha \right] (b_j - b_{j+1})^\alpha. \tag{8.46}$$

Définissons encore n_0 par (8.35); alors une des hypothèses suivantes est verifiée:

$$\text{j)} \quad \omega \leqslant 2^{n_0+1} r^{N\varepsilon/\alpha},$$

$$\text{jj)} \quad \omega > 2^{n_0+1} r^{N\varepsilon/\alpha}.$$

Sous l'hypothèse j) la relation (8.26) est évidemment vérifiée. Supposons par contre que jj) est valable: d'après (8.36) et (8.46) il s'ensuit que

$$b_{n_0}^{\alpha(N-1)/N(\alpha-1)} \leqslant (2c_1)^{1/(\alpha-1)} r^{(N-\alpha)/(\alpha-1)} (b_j - b_{j+1}) \qquad \forall 0 \leqslant j \leqslant n_0 - 1;$$

cette dernière inégalité et (8.35) entraînent

$$b_{n_0} \leqslant \frac{2^N}{\lambda_1} r^N. \tag{8.47}$$

D'autre part y, $l_1 - \eta_{n_0}\omega$, $R = 2r$ et $u(x)$ [1] vérifient une des hypothèses (7.7'); en appliquant alors le Lemme 8.2 ii) on obtient

$$\left| A \left(l_1 - \eta_{n_0}\omega + \frac{d}{2}, r \right) \right| = 0 \tag{8.48}$$

pour tout d tel que

$$d^\alpha \geqslant \frac{\lambda_1}{(2r)^N} \int\limits_{A(l_1 - \eta_{n_0}\omega, 2r)} (u - l_1 + \eta_{n_0}\omega)^\alpha dx + \lambda_2 (2r)^{N\varepsilon};$$

---

[1] Observons que $l_1 - \eta_{n_0}\omega \geqslant \bar{l} \geqslant -S$.

en particulier si l'on prend $d = \eta_{n_0}\omega + \lambda_2^{1/\alpha}(2r)^{N\varepsilon/\alpha}$, on obtient d'après (8.48) la majoration

$$u(x) \geqslant l_1 - \tfrac{1}{2}\eta_{n_0}\omega + \tfrac{1}{2}\lambda_2^{1/\alpha}(2r)^{N\varepsilon/\alpha} \tag{8.49}$$

valable pour presque tous les $x \in \Omega(y, r)$. Finalement (8.49), (8.27) et (8.28) entraînent la thèse.

On démontre maintenant le corollaire suivant (cf. [2], [10]).

COROLLAIRE 8.1. – *Soit $u(x)$ une solution du problème P_j et supposons que les hypothèses* (7.1) ... (7.5) *aient lieu. Alors il existent deux constantes positives δ et H telles que:*

Si $j = 1, 2$ ou 4 et $y \in \partial\Omega$ alors

$$\omega(u, \varrho) \leqslant \left(4^\delta \frac{\omega(u, \varrho_0)}{\varrho_0^\delta} + H\right)\varrho^\delta, \qquad \forall\, 0 < \varrho < \varrho_0 . \tag{8.50}$$

Si $j = 3$ ou 5 et $y \in \Gamma$ la relation (8.50) *est encore valable; si par contre $y \in \partial\Omega - \Gamma$ alors*

$$\omega(u, \varrho) \leqslant \left(4^\delta \frac{\omega(u, \delta_1(y))}{[\delta_1(y)]^\delta} + H\right)\varrho^\delta, \qquad \forall\, 0 < \varrho < \delta_1(y) . \tag{8.51}$$

Finalement si $y \in \Omega$ on a pour tout j

$$\omega(u, \varrho) \leqslant \left(4^\delta \frac{\omega(u, \delta(y))}{[\delta(y)]^\delta} + H\right)\varrho^\delta, \qquad \forall\, 0 < \varrho < \delta(y) . \tag{8.52}$$

REMARQUE. – La continuité de $u(x)$ dans $\bar{\Omega}$ s'ensuit immediatemment du Corollaire 8.1.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. – Les trois majorations se démontrent d'une façon analogue; nous démontrerons (8.51) et nous laisserons la démonstration de (8.50) et (8.52) aux soins du lecteur.

Soit $j = 3$ ou $j = 5$ et $y \in \partial\Omega - \Gamma$; soient η, θ et Λ les constantes du théorème 8.1. Choisissons un nombre réel o tel que

$$\eta < o < 1 \tag{8.53}$$

et définissons $\bar{\delta}$ par l'équation

$$4^{\bar{\delta}}\eta = o\,; \tag{8.54}$$

on pose encore

$$\delta = \min(\theta, \bar{\delta}) . \tag{8.55}$$

Puisque y, r et $u(x)$ vérifient une des deux conditions (8.25.2) ou (8.25.4) on obtient d'après le théorème 8.1

$$(8.56)\qquad \omega(\varrho)\leqslant\eta\omega(4\varrho)+A\varrho^{\delta}, \qquad \forall\, 0<\varrho<\frac{\delta_1(y)}{4}.$$

Posons par definition

$$(8.57)\qquad M=4^{\delta}\frac{\omega(u,\delta_1(y))}{[\delta_1(y)]^{\delta}};$$

D'après (8.57) il s'ensuit que

$$(8.58)\qquad \omega(\varrho)\leqslant M\varrho^{\delta}, \qquad \forall\,\frac{\delta_1(y)}{4}\leqslant\varrho<\delta_1(y).$$

Les relations (8.56) et (8.58) entraînent alors

$$(8.59)\qquad \omega(\varrho)\leqslant\eta M(4\varrho)^{\delta}+A\varrho^{\delta}=(\eta M4^{\delta}+A)\varrho^{\delta}, \qquad \forall\,\frac{\delta_1(y)}{4^2}\leqslant\varrho<\frac{\delta_1(y)}{4};$$

en appliquant de noveau (8.56), cette fois pour $\delta_1(y)/4^3\leqslant\varrho<\delta_1(y)/4^2$, et en employant (8.59) nous obtenons

$$\omega(\varrho)\leqslant\eta(\eta M4^{\delta}+A)(4\varrho)^{\delta}+A\varrho^{\delta}\leqslant[M(\eta 4^{\delta})^2+A(i+4^{\delta}\eta)]\varrho^{\delta}, \qquad \forall\,\frac{\delta_1(y)}{4^3}\leqslant\varrho<\frac{\delta_1(y)}{4};$$

et par induction on voit facilement que pour chaque entier i non négatif la majoration suivante a lieu:

$$(8.60)\qquad \omega(\varrho)\leqslant\Big[M(\eta 4^{\delta})^{i}+A\sum_{s=0}^{i-1}(\eta 4^{\delta})^{s}\Big]\varrho^{\delta}, \qquad \forall\,\frac{\delta_1(y)}{4^{i+1}}\leqslant\varrho<\frac{\delta_1(y)}{4^{i}}.$$

En rappelant que $\eta 4^{\delta}\leqslant o<1$ on déduit facilement d'après (8.60) que

$$(8.61)\qquad \omega(\varrho)\leqslant\left(M+\frac{A}{1-o}\right)\varrho^{\delta}, \qquad \forall\, 0<\varrho<\delta_1(y).$$

Finalement (8.61) et (8.57) entraînent (8.51).

D'après le corollaire que nous venons de démontrer on obtient le résultat suivant:

COROLLAIRE - 8.2. *Soit $u(x)$ une solution du problème P_j et supposons que les hypothèses* (7.1) ... (7.5) *ont lieu. Alors il existent des constantes positives $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ et δ telles que*

$$(8.62)\qquad \omega(u,\varrho)\leqslant[\mathcal{C}\omega(u,\Omega)+\mathcal{K}]\varrho^{\delta}$$

pour tout point $y\in\bar{\Omega}$ et pour tout $\varrho<\varrho_0/4$.

DÉMONSTRATION. - Nous supposons d'abord $j=3$ ou $j=5$ et $y\in\partial\Omega-\Gamma$, et nous démontrons (8.62) pour tout $\varrho<\varrho_0/2$; dans ces conditions une des inégalités suivantes doit être valable:

$$\delta_1(y) \geqslant \frac{\varrho_0}{2}, \tag{8.63}$$

$$\delta_1(y) < \frac{\varrho_0}{2}. \tag{8.64}$$

Si est valable (8.63) d'après (8.51) il s'ensuit que

$$\omega(u, \varrho) \leqslant \left(4^\delta \frac{\omega(u, \Omega)}{(\varrho_0/2)^\delta} + H\right)\varrho^\delta, \qquad \forall\, 0 < \varrho < \varrho_0/2,$$

c'est à dire la majoration (8.62) a lieu pour tout $\varrho < \varrho_0/2$.

Si par contre y est tel que l'hypothèse (8.64) soit vérifiée, on considère un point y_0 de Γ tel que

$$\operatorname{dist}(y_0, y) = \delta_1(y); \tag{8.66}$$

alors ϱ satisfait à l'une des hypothèses suivantes:

i) $\delta_1(y) \leqslant \varrho < \varrho_0/2$

ii) $0 < \varrho < \delta_1(y)$.

Si ϱ vérifie la condition i), (8.50) étant valable pour le point $y_0 \in \Gamma$, on peut écrire

$$\omega_y(u, \varrho) \leqslant \omega_{y_0}(u, 2\varrho) \leqslant \left(4^\delta \frac{\omega(u, \Omega)}{\varrho_0^\delta} + H\right)(2\varrho)^\delta; \tag{8.67}$$

et d'après (8.67) il s'ensuit que (8.62) est valable.

Si par contre, ϱ vérifie la condition ii), d'après (8.6) on a

$$\frac{\omega_y(u, \delta_1(y))}{[\delta_1(y)]^\delta} \leqslant \frac{\omega_y(u, 2\delta_1(y))}{[\delta_1(y)]^\delta}; \tag{8.68}$$

D'autre part en appliquant (8.50) par rapport à y_0 et $2\,\delta_1(y)$ on obtient

$$\frac{\omega_{y_0}(u, 2\delta_1(y))}{[\delta_1(y)]^\delta} \leqslant \left(4^\delta \frac{\omega(u, \Omega)}{\varrho_0^\delta} + H\right)2^\delta. \tag{8.69}$$

En outre (8.51) est valable puisque ϱ vérifie ii); d'après (8.51), (8.68) et (8.69) on obtient

$$\omega(u, \varrho) \leqslant \left[8^\delta\left(4^\delta \frac{\omega(u, \Omega)}{\varrho_0^\delta} + H\right) + H\right]\varrho^\delta, \tag{8.70}$$

c'est à dire que (8.62) est valable. Nous avons ainsi démontré que (8.62) a lieu pour $y\in\partial\Omega$, $\varrho<\varrho_0/2$ et $j=3$ ou 5; et en rappelant (8.50) on déduit que (8.62) a lieu pour $y\in\partial\Omega$, $\varrho<\varrho_0/2$ et j quelconque.

D'après (8.62), pour $\varrho<\varrho_0/2$, et (8.52) on déduit la validité de (8.62) pour tout $y\in\bar{\Omega}$ et tout $\varrho<\varrho_0/4$; on démontre ceci en utilisant le procédé employé pour obtenir (8.62) dans le cas $j=3,5$ et $y\in\partial\Omega-\Gamma$: étant donné $y\in\Omega$ on distingue les cas

$$\delta(y)\geqslant\varrho_0/4\,, \tag{8.71}$$

$$\delta(y)<\varrho_0/4\,. \tag{8.72}$$

Lorsque (8.72) a lieu on considère les deux cas $\delta(y)\leqslant\varrho<\varrho_0/4$ et $0<\varrho<\delta(y)$ et on choisit un point $y_0\in\partial\Omega$ tel que

$$\operatorname{dist}(y_0, y)=\delta(y)\,;$$

on laisse les détails de la démonstration aux soins du lecteur.

Soit $0<\delta<1$; $f(x)$ étant une fonction définie dans $\bar{\Omega}$ on indiquera par $[f]_{\delta,\Omega}$ ou, plus simplement, par $[f]_\delta$ le nombre

$$[f]_{\delta,\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\delta}\,. \tag{8.73}$$

Les fonction $f(x)$ pour lesquelles

$$[f]_{\delta,\Omega}<+\infty$$

sont appelées *fonctions hölderiennes* d'exposant δ; on voit facilement que $[\cdot]_{\delta,\Omega}$ est une seminorme dans l'espace linéaire des fonctions hölderiennes d'exposant δ.

THÉORÈME 8.2. – *Soit $u(x)$ une solution du problème P_j et supposons que les hypothèses* (7.1) ... (7.5) *sont vérifiées. Alors il existent des constantes positives $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ et δ telles que*

$$[u]_{\delta,\Omega}\leqslant\mathcal{C}\omega(u,\Omega)+\mathcal{K}\,. \tag{8.74}$$

DÉMONSTRATION. – x et y étant deux points de $\bar{\Omega}$, si $|x-y|<\varrho_0/4$ on applique le corollaire 8.2. Si, par contre, $|x-y|\geqslant\varrho_0/4$ alors on applique la majoration

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\delta}\leqslant\left(\frac{4}{\varrho_0}\right)^\delta\omega(u,\Omega)\,.$$

9 – Dans ce numéro on démontre le théorème 8.2 sous des hypothèses moins restrictives, à savoir, sans les conditions (7.3) ... (7.5) et avec (0.3) et (0.3′) au lieu de (7.1). Plus précisement on démontre le théorème suivant:

THÉORÈME 9.1. – *Il existe une constante positive δ telle que si $u(x)$ est une solution du problème P_j et si les conditions* (0.3), (0.3′) (0.11) *et* (6.9) *on lieu alors $u(x)$ est hölderienne dans $\overline{\Omega}$ avec exposant δ. En outre $[u]_{\delta,\Omega}$ vérifie les majorations* (9.15) *et* (9.16).

DÉMONSTRATION. – Soit t un nombre réel positif pour le moment arbitraire; l'application $v \to \overline{v} = tv$ est une bijection de V_j sur lui même; u étant une solution du problème P_j, d'après (0.4) on a

$$\int_\Omega A(x, t^{-1}\overline{u}, t^{-1}\nabla\overline{u})\cdot(\overline{v}-\overline{u})\,dx + \int_\Omega B(x, t^{-1}\overline{u}, t^{-1}\nabla\overline{u})(\overline{v}-\overline{u})\,dx \geqslant 0\,, \qquad \forall\overline{v}\in V_j\,; \tag{9.3}$$

en multipliant les deux membres de (9.3) par $t^{\alpha-1}$ nous obtenons

$$\int_\Omega \overline{A}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\cdot\nabla(\overline{v}-\overline{u})\,dx + \int_\Omega \overline{B}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})(\overline{v}-\overline{u})\,dx \geqslant 0\,, \qquad \forall\overline{v}\in V_j \tag{9.4}$$

où

$$\begin{cases} \overline{A}(x, y, p) = t^{\alpha-1}A(x, t^{-1}y, t^{-1}p)\,, \\ \overline{B}(x, y, p) = t^{\alpha-1}B(x, t^{-1}y, t^{-1}p)\,; \end{cases} \tag{9.5}$$

D'après (9.5), (0.3) et (0.3′) nous obtenons les majorations

$$\overline{A}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\cdot\nabla\overline{u} = t^\alpha A(x, t^{-1}\overline{u}, t^{-1}\nabla\overline{u})\cdot t^{-1}\nabla\overline{u} \geqslant \geqslant t^\alpha(a|t^{-1}\nabla\overline{u}|^\alpha - b(x)|t^{-1}\overline{u}|^\alpha - l(x))\,, \tag{9.6}$$

$$|\overline{B}(x, u, \nabla u)| \leqslant t^{\alpha-1}(d(x)|t^{-1}\nabla\overline{u}|^{\alpha-1} + e(x)|t^{-1}\overline{u}|^{\alpha-1} + f(x))\,, \tag{9.7}$$

$$|\overline{A}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})| \leqslant t^{\alpha-1}(a^{-1}|t^{-1}\nabla\overline{u}|^{\alpha-1} + g(x)|t^{-1}\overline{u}|^{\alpha-1} + h(x))\,; \tag{9.8}$$

(9.6), (9.7) et (9.8) entraînent

$$\begin{cases} \overline{A}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\cdot\nabla\overline{u} \geqslant a|\nabla\overline{u}|^\alpha - b(x)|\overline{u}|^\alpha - t^\alpha l(x)\,, \\ |\overline{B}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})| \leqslant d(x)|\nabla u|^{\alpha-1} + e(x)|\overline{u}|^{\alpha-1} + t^{\alpha-1}f(x)\,, \\ |\overline{A}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})| \leqslant a^{-1}|\nabla\overline{u}|^{\alpha-1} + g(x)|\overline{u}|^{\alpha-1} + t^{\alpha-1}h(x)\,. \end{cases} \tag{9.9}$$

En outre d'après le théorème II il s'ensuit que $\overline{u}(x)$ est bornée; alors on a presque partout dans Ω

$$|\overline{u}(x)| \leqslant tS(u)\,;$$

dans ces conditions, et en tenant compte de (9.9), on a

$$\begin{cases} \overline{A}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})\cdot\nabla\overline{u} \geqslant a|\nabla\overline{u}|^\alpha - l_0(x)\,, \\ |\overline{B}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})| \leqslant d(x)|\nabla\overline{u}|^{\alpha-1} + f_0(x)\,, \\ |\overline{A}(x, \overline{u}, \nabla\overline{u})| \leqslant a^{-1}|\nabla\overline{u}|^\alpha + h_0(x)\,, \end{cases} \tag{9.10}$$

où les fonctions l_0, f_0 et h_0 sont données par

$$\left\{\begin{aligned} l_0(x) &= t^{\alpha}(b(x)S(u)^{\alpha} + l(x))\,, \\ f_0(x) &= t^{\alpha-1}(e(x)S(u)^{\alpha-1} + f(x))\,, \\ h_0(x) &= t^{\alpha-1}(g(x)S(u)^{\alpha-1} + h(x))\,. \end{aligned}\right. \tag{9.11}$$

Choisissons t donné par l'équation

$$\begin{aligned} t^{-1} = 2^{1/\alpha}\big[\|l\|_p^{1/\alpha} + \|f\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|h\|_s^{1/(\alpha-1)} + S(u)\big(\|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|g\|_s^{1/(\alpha-1)}\big)\big] + \\ + (1 + \|d\|_r)\,S(u)\,; \end{aligned} \tag{9.12}$$

alors la fonction $\overline{u}(x)$ vérifie les conditions du théorème 8.2: d'abord $\overline{u}(x)$ est une solution de l'inéquation variationelle (9.4); en outre (9.10) n'est que (7.1), et t a été choisi de façon que les fonctions l_0, f_0, h_0, d et $\overline{u}$ satisfassent les conditions (7.3), (7.4) et (7.5). En appliquant la majoration (8.74) on obtient

$$[\overline{u}]_\delta \leqslant 2\,\mathcal{C}S(\overline{u}) + \mathcal{K}\,, \tag{9.13}$$

c'est à dire

$$[u]_\delta \leqslant 2\,\mathcal{C}S(u) + t^{-1}\mathcal{K}\,; \tag{9.14}$$

Finalement en remplaçant dans (9.14) t^{-1} par la valeur donnée dans (9.12) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} [u]_{\delta,\Omega} \leqslant c\big(1 + \|d\|_r + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|g\|_s^{1/(\alpha-1)}\big)\|u\|_\infty + \\ + c\big(\|l\|_p^{1/\alpha} + \|f\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|h\|_s^{1/(\alpha-1)}\big)\,. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Nous pouvons aussi obtenir une majoration analogue à (9.15) avec $\|u\|_\infty$ remplacé par $\|u\|_\alpha$; en effet d'après (9.15) et (0.8) [1] nous obtenons

$$[u]_{\delta,\Omega} \leqslant \mathcal{M}\|u\|_\alpha + \mathcal{N} \tag{9.16}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{M} &= c\big(1 + \|d\|_r + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|g\|_s^{1/(\alpha-1)}\big)\cdot \\ &\qquad \cdot\big(\|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)}\big)^{[(\alpha/N)/(\alpha/N-1/p)]+m_0} + \\ &\qquad + \big(1 + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)}\big)^{m_0}\big(\delta_j + \|d\|_r^{(Nr)/\alpha(r-N)}\big)\,, \\ \mathcal{N} &= c\big(1 + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)}\big)^{m_0} + \\ &\quad + \big(1 + \|d\|_r + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|g\|_s^{1/(\alpha-1)}\big)\big(\|l\|_p^{1/\alpha} + \|f\|_p^{1/(\alpha-1)} + c\|h\|_s^{1/(\alpha-1)}\,. \end{aligned}\right. \tag{9.16'}$$

Le théorème est ainsi démontré.

---

[1] Avec $K = 0$.

REMARQUE. – Dans le cas des problèmes P_1, P_3 et P_5, si les fonctions $d(x)$, $b(x)$ et $e(x)$ sont nulles, la majoration (9.16) ne dépend pas de $\|u\|_\alpha$ et se réduit donc à

$$[u]_{\delta,\Omega} \leqslant \mathcal{N}$$

avec $\mathcal{N}$ donné par (9.16′).

10. – Dans ce paragraphe nous supprimons la condition (6.9) en démontrant ainsi le théorème III. Nous supposons sans perte de généralité que dans l'énoncé du théorème III on a $q = r$, i.e.

$$\psi \in H^{1,r}(\Omega)\,. \tag{10.1}$$

Le résultat suivant est bien connu: si Ω est suffisamment régulier alors

$$H^{1,r}(\Omega) \subset C^{0,1-N/r}(\Omega) \tag{10.2}$$

la majoration suivante étant d'ailleurs valable:

$$[v]_{1-N/r,\Omega} \leqslant c_2(\Omega, N, r)\|\nabla v\|_{r/\Omega}\,, \qquad \forall v \in H^{1,r}(\Omega)\,. \tag{10.2′}$$

Si Ω est régulier au sens de la définition 8.1, la majoration (10.2) est évidemment vérifiée.

On démontre maintenant le lemme suivant:

LEMME 10.1. – *Supposons que les conditions* (0.3), (0.3′) *et* (0.11) *ont lieu et supposons en outre que* $\psi \in H^{1,r}(\Omega)$; *posons*

$$\begin{cases} \bar{A}(x, y, p) = A(x, y + \psi(x), p + \nabla\psi(x))\,, \\ \bar{B}(x, y, p) = B(x, y + \psi(x), p + \nabla\psi(x))\,. \end{cases} \tag{10.3}$$

Alors

$$\begin{cases} \bar{A}(x, y, p)\cdot p \geqslant c(|p|^\alpha - \bar{b}(x)|y|^\alpha - \bar{l}(x))\,, \\ |\bar{B}(x, y, p)| \leqslant c(d(x)|p|^{\alpha-1} + \bar{e}(x)|y|^{\alpha-1} + \bar{f}(x))\,, \\ |\bar{A}(x, y, p)| \leqslant c(|p|^{\alpha-1} + \bar{g}(x)|y|^{\alpha-1} + \bar{h}(x))\,, \end{cases} \tag{10.4}$$

avec

$$\begin{cases} \|\bar{b}\|_p \leqslant c(\|b\|_p + \|g\|_s\|\nabla\psi\|_r)\,, \\ \|\bar{l}\|_p \leqslant c[\|l\|_p + \|\nabla\psi\|_r^\alpha + \|\psi\|_\infty^\alpha\|b\|_p + (1 + \|\psi\|_\infty^{\alpha-1})\|g\|_s\|\nabla\psi\|_r^\alpha + \|h\|_s\|\nabla\psi\|_r]\,, \\ \|\bar{e}\|_p \leqslant c\|e\|_p\,, \\ \|\bar{f}\|_p \leqslant c(\|f\|_p + \|\nabla\psi\|_r^{\alpha-1}\|d\|_r + \|\psi\|_\infty^{\alpha-1}\|e\|_p)\,, \\ \|\bar{g}\|_s \leqslant c\|g\|_s\,, \\ \|\bar{h}\|_s \leqslant c(\|h\|_s + \|\nabla\psi\|_r^{\alpha-1} + \|\psi\|_\infty^{\alpha-1}\|g\|_s)\,. \end{cases} \tag{10.5}$$

DÉMONSTRATION. – On peut d'abord écrire

$$\bar{A}(x, y, p)\cdot p = A(x, y + \psi, p + \nabla\psi)\cdot(p + \nabla\psi) - A(x, y + \psi, p + \nabla\psi)\cdot\nabla\psi\ ; \tag{10.6}$$

En rappelant (0.3), et (0.3′), d'après (10.6) il s'ensuit

$$\bar{A}(x, y, p)\cdot p \geqslant a|p + \nabla\psi|^{\alpha} - b|y + \psi|^{\alpha} - l - a^{-1}|\nabla\psi|\cdot|p + \nabla\psi|^{\alpha-1} - \\ - g|y + \psi|^{\alpha-1}|\nabla\psi| - h|\nabla\psi|\ . \tag{10.7}$$

En outre, l'inégalité algébrique

$$|p + \nabla\psi|^{\alpha} \geqslant 2^{1-\alpha}|p|^{\alpha} - |\nabla\psi|^{\alpha}$$

aient lieu, nous obtenons d'après (10.7)

$$\bar{A}(x, y, p)\cdot p \geqslant 2^{1-\alpha}a|p|^{\alpha} - 2^{\alpha-1}a^{-1}|\nabla\psi|\ |p|^{\alpha-1} - \\ - c(|\nabla\psi|^{\alpha} + b|y|^{\alpha} + + b|\psi|^{\alpha} + l + g|y|^{\alpha-1}|\nabla\psi| + g|\psi|^{\alpha-1}|\nabla\psi| + h|\nabla\psi|)\ . \tag{10.8}$$

D'autre côte, étant valable l'inégalité algébrique $ab^{\alpha-1} \leqslant a^{\alpha} + b^{\alpha}$, on obtient en particulier

$$a^{-1}2^{\alpha-1}|\nabla\psi|\ |p|^{\alpha-1} \leqslant 2^{-1}2^{1-\alpha}a|p|^{\alpha} + c|\nabla\psi|^{\alpha} \tag{10.9}$$

D'après (10.8) et (10.9) on obtient [1] (10.4.1).
Les majorations (10.4.2) et (10.4.3) se démontrent avec des calculs simples.

On indiquera avec V_j^0 l'ensemble V_j quand $\psi \equiv 0$. V_j est une translation de V_j^0; plus précisement on a $V_j = \psi + V_j^0$.
Si $v \in V_j$ on indiquera par $\bar{v}$ la fonction $\bar{v} = v - \psi$, fonction qui appartient à V_j^0.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III. – Si $u(x)$ est une solution de (0.4) on voit facilement que $\bar{u}(x) \in V_j^0$ est une solution de l'inéquation variationelle

$$\int_{\Omega}\bar{A}(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})\cdot\nabla(\bar{v} - \bar{u})\,dx + \int_{\Omega}\bar{B}(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})(\bar{v} - \bar{u})\,dx \geqslant 0\ , \qquad \forall \bar{v} \in V_j^0\ ; \tag{10.10}$$

d'après (10.10), (10.4) et (10.5) on déduit (théorème 9.1) qu'il existe une constante positive δ telle que $\bar{u}(x)$ est hölderienne dans $\bar{\Omega}$ avec exposant δ. En outre $[\bar{u}]_{\delta,\Omega}$ satisfait la majoration (9.15) avec b, l, e, f, g et h remplacées respectivement par $\bar{b}, \bar{l}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ et $\bar{h}$.
D'autre part $\psi(x)$ est hölderienne avec exposant $1 - N/r$; alors $u(x) = \bar{u}(x) + \psi(x)$

---

[1] Remarquons que $1/s + 1/r = 1/p$ et que $\alpha p = r$.

est hölderienne dans $\bar{\Omega}$ avec l'exposant

$$\delta_0 = \min(\delta, 1 - N/r) .$$

Pour terminer, nous voulons majorer d'une façon convenable la constante de HÖLDER de $u(x)$: On a [1]

$$[u]_{\delta_0} \leqslant c[\bar{u}]_\delta + c[\psi]_{1-N/r} , \tag{10.11}$$

et d'après (10.11) et (10.2′) il s'ensuit que

$$[u]_{\delta_0} \leqslant c[\bar{u}]_\delta + c\|\nabla\psi\|_r . \tag{10.12}$$

En employant maintenant (9.15), par rapport à $\bar{u}(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}[\bar{u}]_\delta \leqslant c(1 + \|d\|_r + \|\bar{b}\|_p^{1/\alpha} + \|\bar{e}\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|\bar{g}\|_s^{1/(\alpha-1)})(\|u\|_\infty + \|\psi\|_\infty) + \\ + c(\|\bar{l}\|_p^{1/\alpha} + \|\bar{f}\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|\bar{h}\|_s^{1/(\alpha-1)}) .\end{aligned} \tag{10.13}$$

En majorant dans (10.13) les normes des fonctions $\bar{b}, \bar{l}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ et $\bar{h}$ au moyen des inégalitées (10.5) nous obtenons finalement

$$[u]_{\delta_0,\Omega} \leqslant \mathcal{M}_1\|u\| + \mathcal{N}_1 \tag{10.14}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= c(1 + \|d\|_r + \|b\|_p^{1/\alpha} + \|e\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|g\|_s^{1/(\alpha-1)} + \|g\|_s^{1/\alpha}\|\nabla\psi\|_r^{1/\alpha}) , \\ \mathcal{N}_1 &= \mathcal{M}_1\|\psi\|_\infty + c(1 + \|d\|_r^{1/(\alpha-1)})\|\nabla\psi\|_r + c(\|g\|_s^{1/\alpha} + \|h\|_s^{1/\alpha})\|\nabla\psi\|_r^{1/\alpha} + \\ &\quad + c(\|l\|_p^{1/\alpha} + \|f\|_p^{1/(\alpha-1)} + \|h\|_s^{1/(\alpha-1)}) ; \end{aligned}\right. \tag{10.15}$$

Remarquons que si $\psi(x) = 0$ alors (10.14) se réduit à (9.15).

On peut aussi obtenir une majoration du type (10.14) avec $\|u\|_\infty$ remplacé par $\|u\|_\alpha$. En effet d'après (0.9) il s'ensuit que

$$\|u\|_\infty \leqslant \mathcal{M}_2\|u\|^\alpha + \mathcal{N}_2 \tag{10.16}$$

où $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{N}_2$ sont respectivement le coefficient de $\|u\|_\alpha$ et le terme indépendent dans (0.9); d'après (10.14) et (10.16) il s'ensuit que

$$[\bar{u}]_{\delta_0,\Omega} \leqslant \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\|u\|_\alpha + (\mathcal{M}_1\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_1) , \tag{10.17}$$

où les coefficients du deuxième membre ont déjà été calculés en fonction des données du problème.

---

[1] Si $\delta' \leqslant \delta''$ alors $[\ ]_{\delta'} \leqslant c[\ ]_{\delta''}$, car il existe un nombre $L < +\infty$ tel que deux points de Ω peuvent toujours être reliés par une poligonale contenue dans Ω de longueur plus petite que L.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN, *Théorie du potentiel newtonien etc.*, Bull. Soc. Math. de France, **73** (1945).

[2] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali ecc.*, Mem. Accad. Sc. Torino, s. 3, t. 3 (1957).

[3] G. FICHERA, *Un teorema generale di semicontinuità per gli integrali multipli ecc.*, Atti del Convegno Lagrangiano, Torino, 22-25 octobre 1963; Atti Accad. Sc. Torino, **98** (1963-64).

[4] O. A. LADYZENSKAYA - N. N. UREL'TSEVA, *Linear and quasi-linear elliptic equations* (traduction de l'original en russe), Ac. Press, New York, 1968.

[5] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[6] J. L. LIONS - G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Meth., **20** (1967).

[7] C. MIRANDA, *Partial Differential Equations of Elliptic Type* (second revised edition). Springer, 1970.

[8] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno ellittici ecc.*, Ann. Mat. Pura Appl., **51** (1960).

[9] G. STAMPACCHIA, *Some limit cases of L^p-stimates for solutions etc.*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963).

[10] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les equations elliptiques etc.*, Ann. Inst. Fourier, **15** (1965).

[11] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Sulla hölderianità delle soluzioni di alcune disequazioni ecc.*, Ann. Mat. Pura Appl., **83** (1969).

[12] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Régularité pour une classe d'inéquations non linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, s. A-23 (6 juillet 1970).