BEIRÃO DA VEIGA, H.
1979,
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. CXIX, pp. 379-390

23

Existence et determination du premier point de bifurcation pour des couples d'opérateurs potentiels non différentiables à l'origine (*), (1).

HUGO BEIRÃO DA VEIGA (Trento)

Summary. – *Let Λ and Γ denote respectively the gradients of two Gateaux differentiable real functionals φ and ψ on a real reflexive Banach space V. We shall prove that, under very general assumptions, the first bifurcation point (at the origin in V) for the non-linear equation $\Gamma(u) = \lambda\Lambda(u)$ is the first eigenvalue of the linear equation $B(u) = \lambda A(u)$ where $\Lambda = A + v$ and $\Gamma = B + \omega$. The operators Λ and Γ are not necessarily differentiable at the origin. Roughly speaking it sufficies to assume that the projections in a suitable direction of the remainders $v(u)$ and $\omega(u)$ go to zero faster than $\|u\|$; this direction depends on u ans is, in the simplest examples, actually the u-direction.*

1. – Introduction.

Soient V un espace de Banach réel et réflexif de dual V'; on note $\| \ \|$ la norme dans V et $\langle , \rangle$ la dualité entre V' et V. On désignera par « $\rightharpoonup$ » la convergence faible dans V.

On se donne deux fonctionnelles réelles φ et ψ définies et differentiables au sens de Gâteaux dans V et telles que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ et $\psi(u) \geqslant 0$, $\forall u \in V$. On pose par commodité $\nabla\varphi \equiv \Gamma$, $\nabla\psi \equiv \Lambda$ et on dit que Γ et Λ sont des *opérateurs potentiels* dans V à valeurs dans V'.

On dit que ψ est *faiblement semi-continue inférieurement* (f.s.c.i.) si

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } V \Rightarrow \psi(u) \leqslant \liminf \psi(u_n) .$$

On donne une définition analogue pour *faiblement semi-continue supérieurement* (f.s.c.s.).

On pose par définition

$$M_r = \{u \in V\colon \psi(u) \leqslant r\} , \qquad r \geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_0 M_r = \{u \in \partial M_r\colon \psi(u) = r\} , \tag{1.2}$$

où ∂M_r est la frontière de M_r dans V. Si ψ est continue alors $\partial_0 M_r = \partial M_r$.

(*) Entrata in Redazione il 26 ottobre 1977.

(1) Les résultats contenus dans cette article ont été annoncés dans [2].

DEFINITION 1.1. - On dit que $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}$ est un *point de bifurcation* pour l'équation

$$\Gamma(u) = \lambda \Lambda(u) \tag{1.3}$$

si pour chaque $\mu > 0$ il existe un couple $u, \lambda \in V \times \boldsymbol{R}$, solution de (1.3), tel que $0 < \psi(u) < \mu$, $0 < \|u\| < \mu$ et $|\lambda - \lambda_0| < \mu$.

Par la suite on désigne par le même symbole c des différentes constantes *positives*. On a le résultat suivant:

THÉORÈME 1.1. - *Soient ψ f.s.c.i. et φ f.s.c.s. Supposons qu'il existe une constante positive α tel que $\Lambda = A + \nu$ et $\Gamma = B + \omega$ avec*

$$\langle A(u), u\rangle \geqslant c\|u\|^{1+\alpha}, \quad \forall u \in V, \tag{1.4}$$

$$\langle A(tu), u\rangle = t^\alpha \langle A(u), u\rangle, \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall u \in V, \tag{1.5}$$

$$\langle B(tu), u\rangle = t^\alpha \langle B(u), u\rangle, \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall u \in V, \tag{1.6}$$

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\langle \nu(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle} = 0, \tag{1.7}$$

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\langle \omega(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle} = 0. \tag{1.8}$$

Posons par définition

$$M \equiv M(B, A) = \sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{\langle B(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle}. \tag{1.9}$$

Alors si $M > 0$, M est un point de bifurcation (*le plus grand*) *pour l'équation* (1.3). *Si $M = 0$ le résultat reste valable si les conditions suivantes sont en outre verifiées*: (i) $\forall r$, $\varrho > 0$ *il existe un u dans M_r, avec $\|u\| < \varrho$, et tel que $\varphi(u) > 0$*; (ii) $\varphi(u) > 0 \Rightarrow \Rightarrow \Gamma(u) \neq 0$.

Finalement dans (1.7) *et* (1.8) *on peut remplacer $\langle A(u), u\rangle$ par $\|u\|^{1+\alpha}$* (2).

REMARQUE 1.1. - On démontrera le théorème 1.1 avec les hypothèses (1.7) et (1.8) remplacées par les hypothèses suivantes: Il existe une constante $\varrho > 0$ tel que

$$\lim_{\substack{\psi(u) \to 0 \\ \|u\| < \varrho}} \frac{\langle \nu(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle} = 0 \tag{1.7'}$$

et

$$\lim_{\substack{\psi(u) \to 0 \\ \|u\| < \varrho}} \frac{\langle \omega(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle} = 0. \tag{1.8'}$$

Ces hypothèses sont plus faibles puisque si (1.7) et (1.8) sont vérifiées alors on obtient (1.7′) et (1.8′) d'après (3.20).

---

(2) Est une conséquence de (1.4).

La reciproque est valable si $\psi(u)$ est continue dans l'origine.

Remarque 1.2. - Dans cette article l'ensemble des points de bifurcation vérifie la propriété supplementaire suivante: à chaque $\mu > 0$ il correspond un nombre $r(\mu) > 0$ tel que si $r \in]0, r(\mu)]$ ils existent $u \in \partial_0 M_r$ et $\lambda > 0$, solutions de (1.3), tels que $0 < \|u\| < \mu$, $|\lambda - \lambda_0| < \mu$ et $\varphi(u)$ est le maximum de φ dans la composante connexe de M_r contenante l'origine.

À propos de ce dernier ensemble on vérifiera qu'ils existent deux constantes positives ϱ et r_0 tels que pour tout $r \in [0, r_0]$ l'ensemble

$$M'_r = \{u \in M_r : \|u\| < \varrho\}$$

est étoilé par rapport à l'origine et contenu dans une boule V_ϱ de centre l'origine et rayon plus petit que ϱ. En particulier chaque M_r, $r \in [0, r_0]$, est formé par la partie M'_r (connexe, contenante l'origine et étroitement contenue dans la boule fixé V_ϱ) et par la partie $M_r - M'_r$ (eventuellement vide) *extérieure* à la boule V_ϱ; cette dernière partie de M_r n'étant pas signifiante pour le problème on utilisera dans les démonstrations seulement M'_r.

Dans quelques cas le théorème 1.1 peut être utilisé pour caractériser d'une autre façon la valeur $M(B, A)$ définie dans (1.9). En effet:

Corollaire 1.1. - *Soient A et B deux opérateurs potentiels dans V à valeurs dans V', homogènes de degré α [i.e. $A(tu) = t^\alpha A(u)$, $B(t) = t^\alpha B(u)$, $\forall t \geqslant 0$, $\forall u \in V$]; supposons que la condition (1.4) soit vérifiée, que $\langle A(u), u\rangle$ soit convexe et s.c.i. et que B soit complètement continue [i.e. $u_n \rightharpoonup u$ dans $V \Rightarrow B(u_n) \to B(u)$ dans V']. Alors si la valeur $M(B, A)$ définie par (1.9) est positive elle est la plus grande valeur propre λ [valeur propre $\equiv$ valeur de λ pour laquelle on a une solution $u \neq 0$] pour l'équation*

$$B(u) = \lambda A(u)\,. \tag{1.10}$$

Un corollaire significatif du théorème 1.1 est obtenu en posant $\alpha = 1$ et en considérant A et B linéaires. Un cas particulier de ce dernier est le suivant:

Théorème 1.2. - *Soient φ f.s.c.s., ψ f.s.c.i., $\Gamma = B + \omega$, $\Lambda = A + v$ avec A et B linéaires continues auto-adjointes [i.e. $\langle A(u), v\rangle = \langle A(v), u\rangle$ et $\langle B(u), v\rangle = \langle B(v), u\rangle$, $\forall u, v \in V$], B compact et $\langle A(u), u\rangle \geqslant c\|u\|^2$, $\forall u \in V$.*

Supposons en outre que

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\langle v(u), u\rangle}{\|u\|^2} = 0\,, \tag{1.11}$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\langle \omega(u), u\rangle}{\|u\|^2} = 0\,. \tag{1.12}$$

Si la plus grande valeur propre pour l'équation linéaire $B(u) = \lambda A(u)$ est positive alors elle est un point de bifurcation (le plus grand) pour l'équation non linéaire (1.3).

Remarquons que la condition (1.12) est vérifiée en particulier si

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\|\omega(u)\|_{V'}}{\|u\|} = 0\,, \tag{1.13}$$

c'est à dire si B est la dérivée selon Fréchet de Γ à l'origine (la même remarque est valable pour (1.11), A et Λ).

On renvoie le lecteur à l'introduction de l'article [1] où l'on donne des exemples elementaires d'opérateurs potentiels pour lesquels la condition (1.12) est valable mais pas (1.13), au n. 4 du même article où l'on donne des exemples anàlogues pour des systèmes de Hammerstein et aussi au n. 3 où l'on discute la condition (1.12).

REMARQUE 1.3. - Si $V = H$ est un espace de Hilbert (que l'on identifie à son dual), si $\alpha = 1$ et si $\Lambda = I$ est l'opérateur identité dans H alors le théorème 1.1 est contenu dans le théorème 1.1 de [1].

REMARQUE 1.4. - Si $V = H$ et si $A = I$ le corollaire 1.2 donne la conclusion du théorème 5.1′ de [5] sans utilizer les hypothèses: (j) B positif et $\omega \equiv 0$; (jj) Λ est borné et continu et $(D\Lambda)(0) = A$ au sens de Fréchet. Il est aisé de trouver des exemples pour lesquels les conditions exigées dans le corollaire 1.2 sont vérifiées mais les conditions supplémentaires désignées en haut par (j) et (jj) ne sont pas vérifiées (cf. [2]).

Posons maintenant

$$m(B, A) = \inf_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\langle B(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle}\,. \tag{1.14}$$

Puisque $-\,m(B, A) = M(-\,B, A)$ d'après chaque résultat obtenu pour M il découle un résultat anàlogue pour m. Par exemple:

COROLLAIRE 1.3. - *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 1.1. *avec* φ *f.s.c.i. à la place de f.s.c.s. et* $m(B, A) < 0$ *à la place de* $M(B, A) > 0$. *Alors* $m(B, A)$ *est le plus petit point de bifurcation pour l'équation* (1.3) (3).

Les résultats présentés dans cette article ont été annoncées dans [2]. Des résultats anàlogues pour la bifurcation asymptotique (cf. aussi [1]) seront démontrés dans l'article [3].

---

(3) En effet $M(-B, A)$ est le plus grand point de bifurcation pour l'équation $-\Gamma(u) = \lambda\Lambda(u)$.

2. – Démonstrations des résultats.

On se donne deux fonctionneles φ et ψ vérifiant les propriétés décrites dans l'introduction; en particulier φ est f.s.c.s., ψ est f.s.c.i., $\Gamma \equiv \nabla\varphi$ et $\Lambda \equiv \nabla\psi$ au sens de Gâteaux, c'est a dire, pour chaque couple u, $h \in V$ on a

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(u+th)-\varphi(u)-t\langle\Gamma(u),h\rangle]=0\,,$$

ainsi que la condition anàlogue pour ψ et Λ.

Puisque les résultats qu'on veut démontrer sont locales on va se placer dans un voisinage fixe de l'origine

$$V_\varrho=\{u\in V\colon \|u\|<\varrho\}\,,$$

avec $\varrho>0$ à determiner par la suite.

Si $E\subset V_\varrho$ on écrit $E\Subset V_\varrho$ pour indiquer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $E\subset V_{\varrho-\varepsilon}$ (i.e., E est étroitement contenu dans V_ϱ).

On pose

$$M'_r=M_r\cap V_\varrho\,,\qquad \forall r\geqslant 0,$$

et

$$\partial_0 M'_r=\{u\in\partial M'_r\colon \psi(u)=r\}$$

où $\partial M'_r$ est la frontière de M'_r dans V. Remarquons que si $M'_r\Subset V_\varrho$ alors M'_r est faiblement (sequentiellement) fermé et non vide, $\forall r\geqslant 0$. Le résultat suivant est évident:

LEMME 2.1. – *Soit $M'_r\Subset V_\varrho$. Alors il existe $u_0\in M'_r$ tel que $\varphi(u_0)=\sup_{u\in M'_r}\varphi(u)$.*

Dans le lemme suivant, qui se rattache à un lemme de L. A. Lyusternik (cf. [4], VI, I 2, n. 2) les hypothèses de semi-continuité sur φ et ψ ne sont pas utilisées et en outre il suffit de considerer que u_0 est un point de maximum local de φ dans M_r. Dans ces conditions si $\Gamma(u_0)\neq 0$ on a $u_0\in\partial_0 M_r$ et il existe $\mu\geqslant 0$ tel que $\mu\Gamma(u_0)=$ $=\Lambda(u_0)$.

LEMME 2.2. – *Soit $M'_r\Subset V_\varrho$ et soit u_0 un point de maximum de φ dans M'_r. Alors si $\Gamma(u_0)\neq 0$ on a $u_0\in\partial_0 M'_r$ et $\mu\Gamma(u_0)=\Lambda(u_0)$ pour un certain $\mu\geqslant 0$.*

DÉMONSTRATION. – Évidemment $u_0\in\partial M'_r$. Si $\Lambda(u_0)=0$ on a la conclusion avec $\mu=0$; supposons alors que $\Lambda(u_0)\neq 0$ et soit $h\in V$ tel que $\langle\Lambda(u_0),h\rangle<0$. Puisque $\psi(u_0)\leqslant r$ et $\psi(u_0+th)=\psi(u_0)+t\langle\Lambda(u_0),h\rangle+\theta(u_0,th)$, avec $\theta(u_0,th)/t\to 0$ quand $t\to 0$, il s'ensuit que $u_0+th\in M_r$ pour tout $t\geqslant 0$ suffisament petit. Pour ces valeurs de t on a alors $\varphi(u_0+th)-\varphi(u_0)=t\langle\Gamma(u_0),h\rangle+\theta_1(u_0,th)\leqslant 0$ et par conséquent

$\langle\Gamma(u_0), h\rangle \leqslant 0$ car $\theta_1(u_0, th)/t \to 0$ quand $t \to 0$. On a ainsi vérifié que $\langle\Gamma(u_0), h\rangle \leqslant 0$ si $\langle\Lambda(u_0), h\rangle < 0$. Il s'ensuit aisement que $\langle\Gamma(u_0), h\rangle \leqslant 0$ si $\Lambda(u_0), h\rangle \leqslant 0$ et par conséquent $\mu\Gamma(u_0) = \Lambda(u_0)$ avec $\mu > 0$.

Démonstrons finalement que $\psi(u_0) = r$. Soit $h \in V$ tel que $\langle\Gamma(u_0), h\rangle > 0$. Puisque u_0 est un point de maximum de φ dans M'_r il s'ensuit que pour tout $t > 0$ suffisament petit on a $u_0 + th \in M'_r$, c'est a dire $\psi(u_0 + th) > r$. Ceci entraîne $\psi(u_0) \geqslant r$.

3. – On suppose dans ce numéro que $\Lambda = A + \nu$ où $A\colon V \to V'$ est positif, i.e.

$$\langle A(u), u\rangle \geqslant 0\,, \quad \forall u \in V, \tag{3.1}$$

et vérifie (1.5).

On suppose en outre que $\nu\colon V \to V'$ $\big(\nu(0) = 0\big)$ vérifie la condition (1.7′), c'est à dire que étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$u \in V_\varrho \text{ et } \psi(u) \leqslant \delta \Rightarrow |\langle\nu(u), u\rangle| \leqslant \varepsilon\langle A(u), u\rangle\,. \tag{3.2}$$

D'une manière analogue on suppose que $\Gamma = B + \omega$ où $B\colon V \to V'$ vérifie (1.6) et $\omega\colon V \to V'$ $\big(\omega(0) = 0\big)$ vérifie (1.8′), c'est à dire, étant donné $\varepsilon > 0$ on a

$$\psi(u) \leqslant \delta \text{ avec } u \in V_\varrho \Rightarrow |\langle\omega(u), u\rangle| \leqslant \varepsilon\langle A(u), u\rangle\,, \tag{3.3}$$

où (sans perte de generalité) on a pris le même $\delta = \delta(\varepsilon)$ que dans (3.2).

LEMME 3.1. – *Supposons que les hypothèses* (3.1) *et* (1.7′) *soient vérifiées. Alors il existe $r_0 > 0$ tel que si $u \in M'_{r_0}$, $u \neq 0$, la fonction $t \to \psi(tu)$, $t \in [0, 1]$, est non décroissante. En particulier les ensembles M'_r, $0 \leqslant r \leqslant r_0$, sont étoilées par rapport à l'origine.*

DÉMONSTRATION. – Soit $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ et $r_0 < \delta(\varepsilon_0)$. On a

$$u \in M'_{\delta(\varepsilon_0)} \Rightarrow (1 - \varepsilon_0)\langle A(u), u\rangle \leqslant \langle\Lambda(u), u\rangle \leqslant (1 + \varepsilon_0)\langle A(u), u\rangle\,. \tag{3.4}$$

Posons $f(t) = \psi(tu)$, avec $0 \neq u \in M'_{r_0}$. Alors $f'(t) = \langle\Lambda(tu), u\rangle$ et d'après (3.4) on a

$$f(t) \leqslant \delta(\varepsilon_0) \Rightarrow f'(t) \geqslant 0\,.$$

Il s'ensuit aisement la conclusion car $f(0) = 0$ et $f(1) < \delta(\varepsilon_0)$.

REMARQUE 3.1. – D'après le lemme 3.1, (1.5) et (1.6) il s'ensuit que si $r \in]0, r_0]$ alors

$$M(B, A) = \sup_{u \in \partial_0 M'_r} \frac{\langle B(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle}\,.$$

LEMME 3.2. – *Supposons vérifiées les hypothèses* (3.1), (1.5) *et* (1.7′). *Alors les conditions suivantes sont équivalents*:

(i) *il existe* $r_1 > 0$ *tel que* $M'_{r_1} \Subset V_\varrho$;

(ii) $m(A) \equiv \inf_{\|u\|=1} \langle A(u), u \rangle > 0$;

(iii) *la condition* (1.4) *est vérifiée*;

(iv) *il existe* $r_2 > 0$ *tel que si* $u \in M'_{r_2}$ *alors* $\langle A(u), u \rangle \leqslant c\|u\|^{1+\alpha}$;

(v) *il existe* $r_3 > 0$ *tel que si* $u \in M'_{r_3}$ *on a alors*

$$\psi(u) \geqslant c\|u\|^{1+\alpha}.$$

DÉMONSTRATION. – (i) $\Rightarrow$ (ii): Supposons sans perte de generalité que $r_1 = r_0$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite u_n, $\|u_n\| = 1$, telle que $\theta_n \equiv \langle A(u_n), u_n \rangle \to 0$. Posons $f_n(t) = \psi(tu_n)$, $t \in [0, +\infty[$ et soit t_n la plus petite valeur de t pour laquelle $f_n(t) = r_0$. On a d'après (3.4) et (1.5) $f'_n(t) \leqslant t^\alpha(1 + \varepsilon_0)\theta_n$, pour chaque $t \in [0, t_n]$.

Par conséquent

$$r_0 \equiv f_n(t_n) \leqslant \frac{\theta_n(1 + \varepsilon_0)}{1 + \alpha} t_n^{1+\alpha},$$

et il s'ensuit que $t_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$; ceci est en contradiction avec (i) car $t_n u_n \in V_\varrho$, c'est à dire, $t_n < \varrho$ pour tout n.

(i) $\Rightarrow$ (iii): C'est une conséquence de (1.5).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Il suffit de prende $r_2 = r_0$ et utiliser (3.4).

(iv) $\Rightarrow$ (v): On prend $r_3 = \min(r_0, r_2)$ et l'on utilise la fonction $f(t) = \psi(tu)$.

(v) $\Rightarrow$ (i): On choisit $r_1 \leqslant r_3$ tel que $r_1 < c\varrho^{1+\alpha}$, où c est la constante de la condition (v).

Par la suite on suppose sans perte de generalité que $r_1 = r_2 = r_3 = r_0$. On choisit aussi $\delta(\varepsilon)$ vérifiant $\delta(\varepsilon) \leqslant r_0$.

LEMME 3.3. – *Supposons vérifiées les hypothèses* (3.1), (1.5), (1.6), (1.7′), (1.8′). *Alors étant donné* $\varepsilon > 0$ *on a*

$$\left|\psi(u) - \frac{1}{1+\alpha}\langle A(u), u \rangle\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\alpha}\langle A(u), u \rangle, \tag{3.5}$$

$$\left|\varphi(u) - \frac{1}{1+\alpha}\langle B(u), u \rangle\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\alpha}\langle A(u), u \rangle, \tag{3.6}$$

porvue que $\psi(u) \leqslant \delta(\varepsilon)$ *et* $u \in V_\varrho$.

DÉMONSTRATION. – D'après le lemme 3.1 on a $\psi(tu) \leqslant \delta(\varepsilon)$, $\forall t \in [0, 1]$, et en utilisant (3.3) et (1.5) on obtient

$$|\langle \omega(tu), tu \rangle| \leqslant \varepsilon t^{1+\alpha} \langle A(u), u \rangle\,, \qquad \forall t \in [0, 1]. \tag{3.7}$$

D'autre coté

$$\varphi(u) = \int_0^1 \langle \Gamma(tu), u \rangle dt = \frac{1}{1+\alpha} \langle B(u), u \rangle + \int_0^1 \langle \omega(tu), u \rangle dt\,.$$

D'après cette dernière relation et d'après (3.7) il s'ensuit (3.6). On démontre (3.5) d'une façon analogue.

Par la suite on pose $M = M(B, A)$. On a le résultat suivant:

LEMME 3.4. – *Supposons vérifiés les hypothèses du lemme 3.3. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $r \in [0, \delta(\varepsilon)]$. Alors*

$$\sup_{\partial_0 M'_r} \varphi(u) \geqslant \frac{M - \varepsilon}{1+\varepsilon}\, r\,. \tag{3.8}$$

En particulier on a $M(B, A) < +\infty$.

DÉMONSTRATION. – D'après la remarque 3.1 il existe une suite $u_n \in \partial_0 M'_r$ tel que

$$\langle B(u_n), u_n \rangle \geqslant \left(M - \frac{1}{n}\right) \langle A(u_n), u_n \rangle\,. \tag{3.9}$$

On a

$$\varphi(u_n) \geqslant \frac{1}{1+\alpha} \langle B(u_n), u_n \rangle - \left| \varphi(u_n) - \frac{1}{1+\alpha} \langle B(u_n), u_n \rangle \right|$$

et d'après (3.9) et (3.6) il s'ensuit que

$$\varphi(u_n) \geqslant \frac{M - 1/n - \varepsilon}{1+\alpha}\, \alpha \langle A(u_n), u_n \rangle\,. \tag{3.10}$$

D'autre coté

$$\frac{1}{1+\alpha} \langle A(u), u \rangle \geqslant \frac{\psi(u)}{1+\varepsilon} \tag{3.11}$$

car (3.5) est vérifiée. D'après (3.10) et (3.11) on obtient (3.8).

Finalement s'il était $M = +\infty$ on aurais (3.9) et (3.10) avec $M - 1/n$ remplacé par n et par conséquent on aurais $\lim_{n \to +\infty} \varphi(u_n) = +\infty$ avec $\|u_n\| < \varrho$, $\forall n$. Ceci est en contradiction avec la faible semi-continuité supérieure de φ. Donc $M < +\infty$.

THÉORÈME 3.1. – *Supposons que les conditions* (1.4), (1.5), (1.6), (1.7′) *et* (1.8′) *soient vérifiées et supposons en outre que* $M \geqslant 0$. *Alors il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que le résultat suivant est valable*:

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ *et soit* $r \in]0, \delta(\varepsilon)[$. *Soit* u_0 *un point de maximum de* φ *dans* M'_r (*il en existe au moins un d'après le lemme* 2.1). *Alors* $u_0 \in \partial_0 M'_r$ *et*

$$\Gamma(u_0) = \lambda A(u_0) \tag{3.12}$$

avec $\lambda > 0$ *et*

$$|\lambda - M| \leqslant c\varepsilon . \tag{3.13}$$

Si $M = 0$ *on suppose de plus que*: (i) $\forall r > 0$, *il existe* $u \in M'_r$ *tel que* $\varphi(u) > 0$; (ii) $\varphi(u) > 0 \Rightarrow \Gamma(u) \neq 0$.

DÉMONSTRATION. – Par la suite on pose

$$\varepsilon_0 = \frac{[(M+3)^2 + 4M]^{\frac{1}{2}} - (M+3)}{2} \tag{3.14}$$

si $M > 0$, et $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ (arbitrairement choisit) si $M = 0$.

D'après le lemme 3.4 on a

$$\varphi(u_0) \geqslant \frac{M - \varepsilon}{1 + \varepsilon} r ,$$

et en utilisant (3.3) et (3.6) il s'ensuit que

$$\frac{1}{1+\alpha} \langle \Gamma(u_0), u_0 \rangle \geqslant \frac{M-\varepsilon}{1+\varepsilon} r - \frac{2\varepsilon}{1+\alpha} \langle A(u_0), u_0 \rangle . \tag{3.15}$$

D'autre coté

$$\frac{1}{1+\alpha} \langle A(u_0), u_0 \rangle \leqslant r + \frac{\varepsilon}{1+\alpha} \langle A(u_0), u_0 \rangle$$

et par conséquent

$$\frac{1}{1+\alpha} \langle A(u_0), u_0 \rangle \leqslant \frac{r}{1-\varepsilon} . \tag{3.16}$$

En utilisant (3.15) et (3.16) on obtient

$$\frac{1}{1+\alpha} \langle \Gamma(u_0), u_0 \rangle \geqslant \left[\frac{M}{1+\varepsilon} - \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{2}{1-\varepsilon} \right) \varepsilon \right] r . \tag{3.17}$$

Voyons maintenant que, $\Gamma(u_0) \neq 0$. En effet si $M > 0$ il s'ensuit d'après (3.14) que le deuxième membre de (3.17) et positif pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Donc $\Gamma(u_0) \neq 0$.

Si par contre $M = 0$ il s'ensuit d'après la condition supplementaire (i) que $\varphi(u_0) > 0$ et donc $\Gamma(u_0) \neq 0$ par (ii).

En utilisant maintenant le lemme 2.2 et la condition (iv) du lemme 3.2 on voit que $u_0 \in \partial_0 M'_r$, et que (3.12) est vérifiée avec $\lambda > 0$.

Demontrons finalement (3.13). D'après (3.2), (3.3) et (1.9) il s'ensuit que $(1-\varepsilon)\lambda \leqslant M + \varepsilon$. Donc

$$\lambda \leqslant M + \varepsilon \frac{1+M}{1-\varepsilon}. \tag{3.18}$$

Si $M = 0$ la conclusion est démontré. Si $M > 0$, en utilisant (3.17) et (3.12), on obtient

$$\frac{\lambda}{1+\alpha} \langle A(u_0), u_0 \rangle \geqslant \left(\frac{M-\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) r,$$

et par (3.16) et (3.2)

$$\lambda \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(\frac{M-\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \right).$$

Il s'ensuit aisement que

$$\lambda \geqslant M - \varepsilon \frac{(3+\varepsilon)(M+1)}{(1+\varepsilon)^2}, \tag{3.19}$$

et (3.13) est une conséquence de (3.18) et (3.19).

D'après le théorème 3.1 il découle immediatement le résultat suivant:

THÉORÈME 3.2. – *Supposons vérifiées les hypothèses* (1.4), (1.5), (1.6), (1.7′) *et* (1.8′) *et supposons que* $M \geqslant 0$. *Si* $M = 0$ *on suppose que les conditions supplementaires* (i) *et* (ii) *du théorème* 3.1 *sont vérifiées.*

Alors à chaque $\mu > 0$ *correspond un* $r(\mu) > 0$ *tel que le résultat suivant est valable:*

Ètant donné $r \in \,]0, r(\mu)]$ *ils existent* $u \in \partial_0 M'_r$ *et* $\lambda > 0$, *solutions de* (1.3), *tels que* $|\lambda - M| < \mu$ *et* $0 < \|u\| < \mu$. *En outre* $\varphi(u)$ *est le maximum de* φ *dans* M'_r.

Voyons maintenant que dans tous les résultats on peut remplacer les conditions (1.7′) et (1.8′) par (1.7) et (1.8). Il suffit de vérifier que la conditon (1.7) entraîne l'existence d'un $\varrho > 0$ tel que

$$\lim_{\substack{\varphi(u)\to 0 \\ \|u\| < \varrho}} \|u\| = 0. \tag{3.20}$$

LEMME 3.5. – *Soit* $\Lambda = \nabla\psi$ *avec* $\Lambda = A + v$, *et* v *vérifiant* (1.7). *Supposons en outre que* (1.4) *et* (1.5) *sont vérifiés. Alors il existe un* $\varrho > 0$ *tel que* (3.20) *est valable.*

DÉMONSTRATION. – Désignons par c_0 la constante c de (1.4). On définit $\varrho > 0$ de façon que

$$\|u\| < \varrho \Rightarrow |\langle \nu(u), u\rangle| \leqslant \frac{c_0}{2}\|u\|^{1+\alpha}, \tag{3.21}$$

ce qui est loisible d'après (1.7).

Soit $u \in V_\varrho$. On a

$$\psi(u) = \int_0^1 \langle A(tu), u\rangle\, dt = \int_0^1 t^\alpha \langle A(u), u\rangle\, dt + \int_0^1 \langle \nu(tu), u\rangle\, dt$$

et par conséquent

$$\left|\psi(u) - \frac{1}{1+\alpha}\langle A(u), u\rangle\right| \leqslant \int_0^1 |\langle \nu(tu), u\rangle|\, dt. \tag{3.22}$$

D'après (3.21) il s'ensuit que

$$|\langle \nu(tu), u\rangle| \leqslant \frac{c_0}{2} t^\alpha \|u\|^{1+\alpha},$$

et on obtient d'après (3.22) et (1.4)

$$\psi(u) \geqslant \frac{c_0}{2(1+\alpha)}\|u\|^{1+\alpha}, \qquad \forall u \in V_\varrho. \tag{3.23}$$

Donc (3.20) est valable.

Pour démontrer complement le théorème 1.1 il suffit de prouver le résultat suivant:

THÉORÈME 3.3. – *Sous les hypothèses du théorème* 3.2 *M est le plus grand point de bifurcation pour l'équation* (1.3).

DÉMONSTRATION. – Il suffit de vérifier qu'ils n'existent pas des points de bifurcation plus grands de M. Soit alors λ_0 un point de bifurcation pour (1.3) et soient u_μ et λ_μ comme dans la définition 1.1.

En utilisant l'équation $\Gamma(u_\mu) = \lambda_\mu A(u_\mu)$ et la définition de M on obtient aisement

$$M\langle A(u_\mu), u_\mu\rangle + \langle \omega(u_\mu), u_\mu\rangle \geqslant \lambda_\mu\langle A(u_\mu), u_\mu\rangle + \lambda_\mu\langle \nu(u_\mu), u_\mu\rangle.$$

Donc

$$M - \lambda \geqslant -\frac{\langle \omega(u_\mu), u_\mu\rangle}{\langle A(u_\mu), u_\mu\rangle} + \lambda_\mu \frac{\langle \nu(u_\mu), u_\mu\rangle}{\langle A(u_\mu), u_\mu\rangle}.$$

En faisant $\mu \to 0$ il s'ensuit que $M - \lambda_0 \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1. ET DE LA REMARQUE 1.2. – C'est une conséquence imediate des théorèmes 3.2 et 3.3 et du lemme 3.5.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 1.1. – On a évidement $\psi(u) = (1+\alpha)^{-1}\langle A(u), u\rangle$. En outre les hypothèses du théorème 1.1 sont vérifiées avec $\Gamma = B$ et $\Lambda = A$. Par conséquent étant donné $\mu > 0$ ils existent u_μ et λ_μ tels que $B(u_\mu) = \lambda_\mu A(u_\mu)$, $u_\mu \neq 0$ et $\lambda_\mu \to M$. On peut supposer que $\|u_\mu\| = 1$ et par conséquent $\langle A(u_\mu), u_\mu\rangle \geqslant c$. Il s'ensuit (evenctuellement pour une suite extraite) que $u_\mu \rightharpoonup u$ et $B(u_\mu) \to B(u)$ quand $\mu \to 0$. Puisque $M > 0$ il s'ensuit l'existence de $v \in V$ tel que $A(u_\mu) \to v$.

D'autre coté l'opérateur A est maximal monotone puisque il est la derivée selon Gâteaux de la fonctionnelle réelle convexe et s.c.i. $(1+\alpha)^{-1}\langle A(u), u\rangle$. En particulier

$$0 \leqslant \langle A(u_\mu) - A(w), u_\mu - w\rangle\,, \quad \forall w \in V\,,$$

et en passant à la limite quand $\mu \to 0$ il découle que

$$0 \leqslant \langle v - A(w), u - w\rangle\,, \quad \forall w \in V;$$

puisque A est univoque on a $v = A(u)$.

Finalement

$$\langle A(u), u\rangle = \lim_{\mu\to 0} \langle A(u_\mu), u_\mu\rangle \geqslant c\,,$$

et par conséquent $u \neq 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2. – C'est une conséquence immediate du théorème 1.1. et du corollaire 1.1.

REFERENCES

[1] H. BEIRÃO DA VEIGA, *On bifurcation and asymptotic bifurcation for nondifferentiable potential operators and for systems of Hammerstein type*, Studies in Analysis, Advances in Mathematics supplementary studies, Vol. 4 (1979), Academic Press Inc.

[2] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Bifurcation dans des espaces de Banach pour un couple d'opérateurs non différentiables à l'origine*, C. R. Acad. Sc. Paris, **283** (1976), pp. 329-331.

[3] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Esistenza e calcolo del primo punto di biforcazione asintotica per una coppia di operatori potenziali non differenziabili all'infinito*, à paraître Boll. Unione Mat. Italiana.

[4] M. A. KRASNOSEL'SKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations* (English edition), Pergamon Press Ltd., 1963.

[5] J. NAUMANN, *On bifurcation buckling of thin elastic shells*, Journal de Mécanique, **13** (1974), pp. 715-741.