(22)

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Bifurcation dans des espaces de Banach pour un couple d'opérateurs non différentiables à l'origine*. Note (*) de M. **Hugo Beirão-da-Veiga**, présentée par M. Jacques-Louis Lions.

On caractérise le point de bifurcation principal pour l'équation $\Gamma(u) = \lambda\Lambda(u)$ avec Γ et Λ opérateurs potentiels dans un espace de Banach V à valeurs dans V'. Γ et Λ peuvent être non bornés dans tout voisinage de l'origine et en particulier ils ne doivent pas être différentiables à l'origine.

Soient V un espace de Banach réel et réflexif de dual V'; on note $\| \quad \|$ la norme dans V et $\langle\ ,\ \rangle$ la dualité entre V' et V. On désignera par « $\rightharpoonup$ » la convergence faible dans V.

On se donne deux fonctionnelles réelles Φ et Ψ définies et différentiables au sens de Gâteaux dans V et tels que $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ et $\Psi(u) \geqq 0$, $\forall u \in V$. On pose par commodité $\Gamma \equiv \nabla\Phi$, $\Lambda \equiv \nabla\Psi$ et on dit que Γ et Λ sont des *opérateurs potentiels*.

On dit que Ψ est faiblement semi-continue inférieurement (f. s. c. i.) si

$$\text{«} u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \Psi(u) \leqq \liminf \Psi(u_n) \text{»}.$$

On donne une définition analogue pour f. s. c. supérieurement (f. s. c. s.).

On pose par définition

$$M_r = \{u \in V : \Psi(u) \leqq r\}, \quad r \geqq 0$$

et

$$\partial_0 M_r = \{u \in \partial M_r : \Psi(u) = r\},$$

où ∂M_r est la frontière de M_r dans V.

DÉFINITION. — On dit que $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ est un *point de bifurcation* pour l'équation

$$\Gamma(u) = \lambda\Lambda(u) \tag{1}$$

si pour chaque $\mu > 0$ il existe un couple $u, \lambda \in V \times \mathbf{R}$, solution de (1), tel que $0 < \Psi(u) < \mu$, $0 < \|u\| < \mu$ et $|\lambda - \lambda_0| < \mu$.

Remarque 1. — Dans cette Note les points de bifurcation en question vérifient la propriété suivante : pour tout $\mu > 0$ il existe $r(\mu) > 0$ tel que pour chaque $r \in]0, r(\mu)]$ il existe $u \in \partial_0 M_r$ et $\lambda > 0$, solutions de (1), tels que $0 < \|u\| < \mu$ et $|\lambda - \lambda_0| < \mu$. En outre $\Phi(u)$ est le maximum de Φ dans M_r.

On a le résultat suivant (on désigne par le même symbole c des différentes constantes positives) :

THÉORÈME 1. — *Soient Ψ f. s. c. i., Φ f. s. c. s., $\Lambda = A + \nu$, $\Gamma = B + \omega$. Supposons que (avec α constante positive) :*

$$\langle A(u), u\rangle \geqq c\|u\|^{1+\alpha}, \quad \forall u \in V \quad (^1), \tag{2}$$

$$\langle A(tu), u\rangle = t^\alpha \langle A(u), u\rangle, \quad \forall t \geqq 0, \quad \forall u \in V, \tag{3}$$

$$\langle B(tu), u\rangle = t^\alpha \langle B(u), u\rangle, \quad \forall t \geqq 0, \quad \forall u \in V, \tag{4}$$

$$\lim_{\Psi(u)\to 0} \frac{\langle \nu(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle} = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\Psi(u)\to 0} \frac{\langle \omega(u), u\rangle}{\langle A_i(u), u_i\rangle} = 0. \tag{6}$$

Posons par définition

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{M} \equiv \mathrm{M}(\mathrm{B}, \mathrm{A}) = \sup_{u \in \mathrm{V}} \frac{\langle \mathrm{B}(u), u \rangle}{\langle \mathrm{A}(u), u \rangle}.$$

Alors si $\mathrm{M} > 0$, M *est un point de bifurcation (le plus grand) pour l'équation* (1). *St* « $\forall r > 0$ *il existe* $u \in \mathrm{M}_r$ *avec* $\Phi(u) > 0$ » *et* « $\Phi(u) > 0 \Rightarrow \Gamma(u) \neq 0$ » *alors le résultai reste valable si* $\mathrm{M} = 0$.

On remarque en passant que, pour r suffisamment petit :

$$\mathrm{M}(\mathrm{B}, \mathrm{A}) = \sup_{u \in \partial_0 \mathrm{M}_r} \frac{\langle \mathrm{B}(u), u \rangle}{\langle \mathrm{A}(u), u \rangle}.$$

Posons

$$m(\mathrm{B}, \mathrm{A}) = \inf[\langle \mathrm{B}(u), u \rangle / \langle \mathrm{A}(u), u \rangle] \quad \text{sur V.}$$

On a $-m(\mathrm{B}, \mathrm{A}) = \mathrm{M}(-\mathrm{B}, \mathrm{A})$. Par conséquent d'après chaque résultat obtenu pour M, il découle un résultat analogue pour m. Par exemple :

COROLLAIRE 1. — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 1 *avec* Φ *f. s. c. i. à la place de f.s.c.s. et* $m(\mathrm{B}, \mathrm{A}) < 0$ *à la place de* $\mathrm{M}(\mathrm{B}, \mathrm{A}) > 0$. *Alors* $m(\mathrm{B}, \mathrm{A})$ *est le plus petit point de bifurcation pour l'équation* (1).

Le résultat suivant peut être aussi utilisé pour caractériser d'une autre façon la valeur $\mathrm{M}(\mathrm{B}, \mathrm{A})$ du théorème 1 :

COROLLAIRE 2. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs potentiels dans* V *à valeurs dans* V', *homogènes de degré* α [*i. e.* $\mathrm{A}(tu) = t^{\alpha} \mathrm{A}(u), \forall t \geqq 0, \forall u \in \mathrm{V}$]; *supposons que la condition* (2) *soit vérifiée. Soit* $\langle \mathrm{A}(u), u \rangle$ *convexe et s.c.i. et soit* B *complètement continue*

$$[\textit{i. e.} \; « u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \mathrm{B}(u_n) \to \mathrm{B}(u) »].$$

Alors si $\mathrm{M}(\mathrm{B}, \mathrm{A})$ *est positif il est la plus grande valeur propre (i. e. valeur pour laquelle on a une solution* $u \neq 0$) *pour l'équation*

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{B}(u) = \lambda \mathrm{A}(u).$$

D'après le théorème 1 on obtient divers résultats parmi lesquels on met en évidence les deux suivants :

COROLLAIRE 3. — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 1 *avec*

$$\text{(9)} \qquad \lim_{\|u\| \to 0} \frac{\langle v(u), u \rangle}{\|u\|^{1+\alpha}} = 0$$

et

$$\text{(10)} \qquad \lim_{\|u\| \to 0} \frac{\langle \omega(u), u \rangle}{\|u\|^{1+\alpha}} = 0$$

à la place de (5) *et* (6) *respectivement. Alors la conclusion du théorème* 1 *reste valable.*

COROLLAIRE 4. — *Soient* Φ *f. s. c. s.*, Ψ *f. s. c. i.*, $\Gamma = B+\omega$, $\Lambda = A+\nu$ *avec* A *et* B *linéaires continues auto-adjointes*, B *compact et* $\langle A(u), u \rangle \geqq c \| u \|^2$, $\forall u \in V$. *Supposons en outre que*

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\langle \nu(u), u \rangle}{\|u\|^2} = 0, \tag{11}$$

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\langle \omega(u), u \rangle}{\|u\|^2} = 0. \tag{12}$$

Si la plus grande [*resp. petite*] *valeur propre pour l'équation linéaire* $B(u) = \lambda A(u)$ *est positive* [*resp. négative*] *alors il est un point de bifurcation* (*le plus grand*) [*resp.* (*le plus petit*)] *pour l'équation non linéaire* (1).

La condition (12) est vérifiée en particulier si

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\| \omega(u) \|_{V'}}{\|u\|} = 0, \tag{13}$$

c'est-à-dire, si B est le dérivée au sens de Fréchet de Γ à l'origine [la même remarque est valable pour (11), A et Λ].

On renvoie le lecteur à l'introduction de l'article ([2]) où l'on donne des exemples élémentaires (dans $\mathbf{R}^2$) qui vérifient (12) mais pas (13), et aussi au n° 3 où l'on discute la condition (12). Dans le n° 4 de ([2]) on a utilisé la condition (12) pour l'étude du plus grand et du plus petit point de bifurcation pour une classe de systèmes de Hammerstein ne vérifiant pas (nécessairement) la condition (13). On renvoie aussi à ([2]) pour des exemples qui motivent la considération d'opérateurs A et B positivement homogènes (*cf.* l'introduction et la remarque 4.2).

Remarque 2. — Si V = H est un espace de Hilbert (que l'on identifie à son dual) et si $\Lambda = I$ est l'opérateur identité dans H alors le théorème 1 est contenu dans le théorème 2.1 de ([2]).

Remarque 2. — Si V = H et si A = I le corollaire 4 donne la conclusion du théorème 5.1′ de ([3]) sans utiliser les hypothèses : (i) B positif et $\omega \equiv 0$; (ii) Λ continu borné, et $(D\Lambda)(0) = A$ au sens de Fréchet.

Il est aisé de trouver des exemples pour lesquels les conditions exigées dans le corollaire 4 sont vérifiées mais les conditions supplémentaires désignées en haut par (i) et (ii) ne sont pas vérifiées. Voici un exemple dans $\mathbf{R}^2$: on pose $H = \mathbf{R}^2$, on choisit Γ vérifiant les conditions du corollaire 4 mais ne vérifiant pas les deux conditions contenues dans (i) (un tel choix est trivial) et on pose $\Lambda = \nabla \Psi$, où Ψ est la fonction définie par (0.1) dans ([2]). Alors Λ vérifie les conditions du corollaire 4 (avec A = I) mais ne vérifie aucune des conditions (ii), comme il suit des résultats de l'introduction de ([2]).

Les résultats présentés dans cette Note, et des résultats analogues pour la bifurcation asymptotique [*cf.* aussi ([2])], seront démontrés dans une prochaine publication.

(*) Séance du 28 juin 1976.

([1]) Sous les hypothèses du théorème cette condition est équivalente à $\liminf_{\|u\| \to +\infty} \Psi(u) > 0$.

([2]) H. BEIRÃO-DA-VEIGA, *On Bifurcation and Asymptotic Bifurcation for Non-Differentiable Potential Operators and for Systems of Hammerstein Type*, preprint I.F.M. 1976, édition révisée.

([3]) J. NAUMANN, *Journal de Mécanique*, 13, 1974, p. 715-741.

Instituto de Física e Matemática,
Av. Gama Pinto, 2,
Lisboa-4 (*Portugal*).