ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. LIX, fasc. 6 - Dicembre 1975

20

Matematica. — *Sul più grande punto di biforcazione positivo per una classe di operatori potenziali non differenziabili.* Nota di HUGO BEIRÃO DA VEIGA (*), presentata (**) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — We characterize the first bifurcation point for some potential non-differentiable operators in Hilbert spaces.

Sia H uno spazio di Hilbert reale di norma $\| \ \|$ e prodotto scalare $(\, , \,)$. Indicheremo con « $\rightarrow$ » la convergenza in norma e con « $\rightharpoonup$ » la convergenza debole in questo spazio.

Nel seguito indicheremo con $\mathbf{K}$ un cono convesso e chiuso in H di vertice nell'origine, ossia $\mathbf{K}$ è un sottoinsieme chiuso di H tale che $t\mathbf{K} \subset \mathbf{K}$ per ogni $t \geq 0$ e $\mathbf{K} + \mathbf{K} \subset \mathbf{K}$. Si suppone che $\mathbf{K}$, non vuoto, non si riduca all'origine.

Dato $\rho \geq 0$ porremo $S_\rho = \{x \in H : \|x\| = \rho\}$, $V_\rho = \{x \in H : \|x\| \leq \rho\}$, $\mathbf{K}_\rho = \mathbf{K} \cap V_\rho$.

Un numero reale μ si dice un *punto di biforcazione* (o di diramazione) per un operatore $\Gamma : \mathbf{K} \rightarrow H$ se per $\varepsilon > 0$ esiste una coppia $(\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \mathbf{R} \times \mathbf{K}$ tale che $\Gamma x_\varepsilon = \mu_\varepsilon x_\varepsilon$, $|\mu - \mu_\varepsilon| < \varepsilon$, $0 < \|x_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Analogamente $+\infty$ è un punto di biforcazione per Γ se nella precedente definizione la condizione $|\mu - \mu_\varepsilon| < \varepsilon$ viene sostituita con $\mu_\varepsilon > 1/\varepsilon$; una definizione analoga vale per $-\infty$.

Se nelle precedenti definizioni si sostituisce la condizione $0 < \|x_\varepsilon\| < \varepsilon$ con $\|x_\varepsilon\| > 1/\varepsilon$ si dirà che μ (risp. $\pm\infty$) è un *punto di biforcazione* (o di diramazione) *asintotico* per l'operatore Γ.

Ovviamente nella prima definizione basta che Γ sia definito in un certo $\mathbf{K}_\rho$ $(\rho > 0)$ e nella seconda che lo sia in un certo $\mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho$.

Se S è un sottoinsieme non vuoto di H e Φ un funzionale reale definito in S diremo che Φ è debolmente continuo in S se $x_n \in S$, $x_n \rightharpoonup x_0 \in S$ implica che $\Phi(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x_n)$.

Diremo che Φ è debolmente semi-continuo superiormente se sotto le stesse ipotesi si ha $\Phi(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x_n)$. In modo analogo si definisce la semi-continuità inferiore debole.

Indicheremo con $\bar{S}$ la chiusura *debole* di S nel senso seguente: $\bar{S} = \{x \in H : \exists x_n \in S, \ n = 1, 2, \cdots, x_n \rightharpoonup x\}$. Ovviamente $\bar{S} = S$ se S è un sottoinsieme fortemente chiuso e convesso di H.

(*) Ricercatore dello « Instituto de Física e Matemática » (Lisbona).
(**) Nella seduta del 13 dicembre 1975.

Se $\Phi : S \to \mathbf{R}$ diremo che Φ è debolmente continuo in $\bar{S}$ se esiste una estensione di Φ a $\bar{S}$ debolmente continua in $\bar{S}$ (valgono definizioni analoghe per le semi-continuità superiore e inferiore debole in $\bar{S}$).

È ben noto il seguente risultato (cfr. [2], § 6, Teorema 2.1 e [3], § 17, Teorema 17.6).

TEOREMA. *Sia* $\Phi : H \to \mathbf{R}$, $\Phi(0) = 0$, *un funzionale debolmente continuo e Fréchet differenziabile in* H *e poniamo* $\Gamma = \nabla\Phi$. *Supponiamo che* $\Gamma 0 = 0$ *e che* Γ *ammetta una derivata secondo Fréchet nell'origine* $D\Gamma(0) = B$, *essendo* B *un operatore lineare continuo compatto e autoaggiunto.*

Allora il più grande autovalore μ_0 *di* B, *se positivo, è un punto di biforcazione per* Γ.

In questa Nota generalizzeremo questo risultato ad una classe di operatori definiti in coni e *non necessariamente derivabili nell'origine*. Questa generalizzazione sarà estesa anche al caso della biforcazione asintotica. Le dimostrazioni dei risultati che enunceremo (insieme a delle applicazioni) saranno presentate in [1].

Diremo che $B : \mathbf{K} \to H$ è positivamente omogeneo se $B(tx) = tBx$ per ogni $x \in \mathbf{K}$ ed ogni $t \geq 0$. Porremo inoltre

$$m_{\mathbf{K}}(B) = \inf_{x \in \mathbf{K} \cap S_1} (Bx, x) \quad , \quad M_{\mathbf{K}}(B) = \sup_{x \in \mathbf{K} \cap S_1} (Bx, x) \quad .$$

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $\Gamma = B + \omega$ *con* $B : \mathbf{K} \to H$ *positivamente omogeneo e* $\omega : \mathbf{K} \to H$ *verificante*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 \neq x \in \mathbf{K}}} \frac{(\omega x, x)}{\|x\|^2} = 0 . \tag{1}$$

Allora i punti di biforcazione di Γ *in* $\mathbf{K}$ *sono contenuti nell'intervallo chiuso* $[m_{\mathbf{K}}(B), M_{\mathbf{K}}(B)]$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $\Gamma = B + \omega$ *con* $B : \mathbf{K} \to H$ *positivamente omogeneo e* $\omega : \mathbf{K} \to H$ *verificante*

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in \mathbf{K}}} \frac{(\omega x, x)}{\|x\|^2} = 0 . \tag{2}$$

Allora i punti di biforcazione asintotici di Γ *in* $\mathbf{K}$ *sono contenuti nell'intervallo* $[m_{\mathbf{K}}(B), M_{\mathbf{K}}(B)]$.

OSSERVAZIONE 1. Questi risultati hanno un carattere locale bastando nella Proposizione 1 che Γ sia definito in $\mathbf{K}_\rho$, per un $\rho > 0$, e nella Proposizione 2 che Γ sia definito in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho$ per un $\rho \geq 0$.

A questo punto si pone naturalmente il problema di studiare in che condizioni i valori estremi dell'intervallo $[m_{\mathbf{K}}(B), M_{\mathbf{K}}(B)]$ siano effettivamente punti di biforcazione per Γ. Siccome μ è un punto di biforcazione (nell'origine o asintotico) per Γ se e soltanto se $-\mu$ è un punto di biforcazione per $-\Gamma$, lo studio concernente il valore $m_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})$ si riconduce sempre allo studio concernente $\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})$. Quindi, e senza perdita di generalità, ci restringeremo a quest'ultimo caso.

Se Φ è un funzionale reale definito in $\mathbf{K}$ diremo che Φ è Gateaux differenziabile in un punto $x_0 \in \mathbf{K}$ e che il suo gradiente (Gateaux) in x_0 è $y \in \mathrm{H}$ se

$$\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0) = (y, th) + \omega(x_0, th), \tag{3}$$

$$\forall h \quad \text{tale che} \quad x_0 + h \in \mathbf{K}, \forall t \in]0, 1]$$

ove $\lim_{t \to 0} [\omega(x_0, th)/t] = 0$. Porremo allora $y = \nabla\Phi(x_0)$.

Se $\Phi : \mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho : \to \mathbf{R}$ e se $x_0 \in \mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho$ si considerano in (3) soltanto gli incrementi h tali che $\|h\| < \|x_0\| - \rho$.

Sia $\Gamma : \mathbf{K} \to \mathrm{H}$. Useremo nel seguito la seguente condizione (4), che è verificata in particolare se $\Gamma\mathbf{K} \subset \mathbf{K}$ (cfr. Osservazione 3):

(4) sia $x \in$ frontiera di $\mathbf{K}$ con $(\Gamma x, x) > 0$ e

$\Gamma x \neq \lambda x$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Allora, posto $\rho = \|x\|$,

esiste $y \in \mathrm{K}_\rho$, $y \neq x_0$, tale che $(\Gamma x, y) \geq (\Gamma x, x)$.

Nel Teorema 2 questa ipotesi sarà usata per un operatore Γ definito in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}$ essendo allora sottointeso che in (4) si prendono in considerazione soltanto punti x verificanti $\|x\| > \rho_0$.

TEOREMA 1. *Sia* $\Phi : \mathbf{K} \to \mathbf{R}$, $\Phi(0) = 0$, *un funzionale debolmente semicontinuo superiormente e Gateaux differenziabile e poniamo* $\Gamma = \nabla\Phi$. *Supponiamo che* Γ *verifichi la condizione* (4) *ed inoltre che si abbia* $\Gamma = \mathrm{B} + \omega$ *con* B *positivamente omogeneo in* $\mathbf{K}$ *e* ω *soddisfacente* (1).

Allora se $\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})$ *è positivo,* $\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})$ *è il più grande punto di biforcazione di* Γ *in* $\mathbf{K}$.

Si osserva che le ipotesi del Teorema 1 implicano che $\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\mathrm{B}) < +\infty$ ma non escludono che $m_{\mathbf{K}}(\mathrm{B}) = -\infty$. Si osservi anche che il Teorema 1 ha un carattere locale, ossia è sufficiente che le funzioni siano definite e le ipotesi vengano verificate in un certo $\mathbf{K}_\rho$, con ρ positivo arbitrariamente piccolo.

TEOREMA 2. *Sia* $\Phi : \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0} \to \mathbf{R}$ *un funzionale debolmente semi-continuo superiormente in* $\overline{\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}}$, *Gateaux differenziabile in* $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}$ *e tale che* $\Gamma = \nabla\Phi$ *verifichi la condizione* (4) *ed inoltre* $\Gamma = \mathrm{B} + \omega$ *con* B *positivamente omogeneo in* $\mathbf{K}$ *e* ω *verificante* (2). *Sia* $|\Phi(x) - \frac{1}{2}(\mathrm{B}x, x)|$ *limitato su* $\mathrm{K} \cap \mathrm{S}_\rho$ *per ogni* $\rho > \rho_0$.

Allora se $\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})$ *è positivo,* $\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})$ *è il più grande punto di biforcazione asintotico per* Γ *in* $\mathbf{K}$.

OSSERVAZIONE 2. Nel Teorema 2 la semi–continuità superiore debole di Φ in $\overline{\mathbf{K}-\mathbf{K}_{\rho_0}}$ può essere sostituita con la semi–continuità superiore debole di Φ in $\mathbf{K}-\mathbf{K}_{\rho_0}$ insieme a quella di $(\mathrm{B}x\,,x)$ in $\mathbf{K}$. Inoltre quella stessa condizione è soddisfatta se Φ è definito e debolmente semi–continuo superiormente in tutto $\mathbf{K}$.

OSSERVAZIONE 3 (condizioni sufficienti per la condizione (4)). Affinchè la condizione (4) sia verificata in un punto x è sufficiente che esista $\varepsilon=\varepsilon(x)>0$ tale che $x+\varepsilon\Gamma x\in\mathbf{K}$. In particolare è sufficiente che $\Gamma x\in\mathbf{K}$.

Più in particolare la condizione (4) è verificata se $\Gamma\mathbf{K}\subset\mathbf{K}$ o se $\mathbf{K}=\mathrm{H}$.

OSSERVAZIONE 4 (sulle condizioni (1) e (2)). Dati due operatori B e $\overline{\mathrm{B}}$ positivamente omogenei su $\mathbf{K}$ diremo che B e $\overline{\mathrm{B}}$ sono equivalenti (e scriveremo $\mathrm{B}\sim\overline{\mathrm{B}}$) se $(\mathrm{B}x\,,x)=(\overline{\mathrm{B}}x\,,x)$, $\forall x\in\mathbf{K}$. Se $\mathrm{B}\sim\overline{\mathrm{B}}$ allora $m_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})=$ $=m_{\mathbf{K}}(\overline{\mathrm{B}})$ e $\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\mathrm{B})=\mathrm{M}_{\mathbf{K}}(\overline{\mathrm{B}})$.

Supponiamo che Γ è definito in $\mathbf{K}_\rho$, $\rho>0$, [risp. in $\mathbf{K}-\mathbf{K}_\rho$] e che $\Gamma=\mathrm{B}+\omega$ con B positivamente omogeneo in $\mathbf{K}$ e ω verificante (1) [risp. (2)]. In queste condizioni diremo che $\Gamma=\mathrm{B}+\omega$ è una decomposizione ammissibile (nell'origine) [risp. (all'infinito)].

Se $\Gamma=\mathrm{B}+\omega$ è una dec. ammissibile e se $\mathrm{B}\sim\overline{\mathrm{B}}$ allora esiste una dec. ammissibile $\Gamma=\overline{\mathrm{B}}+\overline{\omega}$. Reciprocamente se $\Gamma=\mathrm{B}+\omega$ e $\Gamma=\overline{\mathrm{B}}+\overline{\omega}$ sono due dec. ammissibili allora $\mathrm{B}\sim\overline{\mathrm{B}}$.

Si osservi che se B è un operatore lineare continuo allora esiste uno (unico) operatore lineare continuo autoaggiunto B_p tale che $\mathrm{B}_p\sim\mathrm{B}$.

Sia $\Gamma:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$, $\Gamma 0=0$. Γ è Fréchet differenziabile nell'origine (con $\mathrm{D}\Gamma(0)=\mathrm{B}$ operatore lineare continuo) se $\Gamma=\mathrm{B}+\omega$ con ω verificante

$$\lim_{x\to0}\frac{\|\omega(x)\|}{\|x\|}=0. \tag{5}$$

Se decomponiamo il campo di vettori $\omega(x)$ nelle componenti radiale e tangenziale, cioè,

$$\omega_1(x)=\frac{(\omega x\,,x)}{\|x\|^2}\,x\qquad,\qquad\omega_2(x)=\omega(x)-\frac{(\omega x\,,x)}{\|x\|^2}\,x\,,$$

e se consideriamo le condizioni $(i=1\,,2)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\|\omega_i(x)\|}{\|x\|}=0\,, \tag{6_i}$$

allora si vede che (5) equivale a (6_1) più (6_2). Invece (1) equivale soltanto a (6_1). Si osservi in proposito che $\omega_1(x)$ appartiene ad uno sottospazio unidimensionale ben determinato (cioè indipendente dal particolare $\omega(x)$) mentre in questo stesso senso $\omega_2(x)$ appartiene ad un iperpiano.

Finalmente se Γ ammette una dec. ammissibile ed è differenziabile Gateaux nell'origine allora $\Gamma=\nabla\Gamma(0)+(\Gamma-\nabla\Gamma(0))$ è una dec. ammissibile.

Le diverse proprietà descritte sussistono se Γ è definito in un cono $\mathbf{K}$ e se la derivata (Fréchet o Gateaux) $D\Gamma(0) = B$ è soltanto un operatore positivamente omogeneo definito in $\mathbf{K}$ (diciamo che un tale operatore B è la derivata Fréchet [risp. Gateaux] di Γ nell'origine se $\Gamma = B + \omega$ ed il resto ω verifica (5) [risp. la solita condizione direzionale] in $\mathbf{K}$).

Risultati del tutto analoghi sussistono sostituendo (1) con (2) e la differenziabilità (Fréchet o Gateaux) nell'origine con quella all'infinito.

Una discussione più dettagliata verrà presentata in [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BEIRÃO DA VEIGA – *On bifurcation and asymptotic bifurcation for non differentiable potential operators and for systems of Hammerstein type* (di prossima pubblicazione).

[2] M. A. KRASNOSEL'SKII (1963) – *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations* (English edition), Pergamon Press.

[3] M. M. VAINBERG (1964) – *Variational methods for the study of nonlinear operators* (English edition), Holden-Day, Inc.

ROMA, 1976 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei