C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 23-25 (6 juillet 1970). Série A

(2)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Régularité pour une classe d'inéquations non linéaires.* Note (*) de M. **Hugo Beirão da Veiga** [1], présentée par M. Jean Leray.

On démontre la régularité L^p, L^∞ et höldérienne des solutions d'une classe d'équations aux dérivées partielles, non linéaires, avec des conditions aux limites mêlées et unilatérales.

1. Notations et cadre fonctionnel. — Soit Ω un sous-ensemble ouvert connexe et borné de l'espace euclidien $\mathbf{R}^N$, de frontière $\partial\Omega$; on se donne aussi un ensemble fermé $\partial_1\Omega \subset \partial\Omega$. On suppose ces ensembles réguliers.

Si $1 < \beta < N$, β^* indique l'exposant de Sobolev $(\beta^*)^{-1} = \beta^{-1} - N^{-1}$.

Étant donné un nombre réel p, $p > 1$, on indique avec $L^p_*(\Omega)$ l'espace des fonctions $f(x)$ mesurables sur Ω pour lesquelles il existe une constante A non négative telle que

$$\text{mes}\{x \in \Omega : |f(x)| > t\} \leq (\mathrm{A}t^{-1})^p, \quad \forall t > 0; \tag{1}$$

La plus petite constante A pour laquelle (1) a lieu sera indiquée par $|f|_p$; $|\ |_p$ est une quasi norme dans l'espace vectoriel $L^p_*(\Omega)$.

On suppose connues les définitions des espaces $L^p(\Omega)$, $H^{1,p}(\Omega)$, $H^{1,p}_0(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, et $C^{0,\delta}(\overline{\Omega})$, où $0 < \delta < 1$; on indique par $\|\ \|_p$, $\|\ \|_{1,p}$, $\|\ \|_\infty$ et $[\ ]_\delta$ les normes habituelles dans ces espaces.

Si w est une fonction différentiable on indique par ∇w son vecteur gradient. Si $\xi, \eta \in \mathbf{R}^N$ on indique par $\xi.\eta$ le produit scalaire des deux vecteurs.

Dans la suite α désigne une constante telle que $1 < \alpha < N$.

Soit $\psi \in H^{1,\alpha}(\Omega)$; on introduit les sous-ensembles convexes fermés de $H^{1,\alpha}(\Omega)$ suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = \{v \in H^{1,\alpha}(\Omega) : v - \psi \in H^{1,\alpha}_0(\Omega)\}, \\ V_2 = H^{1,\alpha}(\Omega), \\ V_3 = \{v \in H^{1,\alpha}(\Omega) : v = \psi \text{ sur } \partial_1\Omega\}, \\ V_4 = \{v \in H^{1,\alpha}(\Omega) : v \geq \psi \text{ sur } \partial\Omega\}, \\ V_5 = V_3 \cap V_4. \end{array}\right. \tag{2}$$

On pose $K = \sup_{\partial\Omega} |\psi|$ et on suppose que $K < +\infty$.

Résultats obtenus. — Considérons $N+1$ fonctions réelles $A_i(x, y, p)$, $1 \leq i \leq N$, et $B(x, y, p)$ définies sur $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_N$ mesurables en x et continues en y, p; par $A(x, y, p)$ nous indiquons le vecteur de composantes $A_i(x, y, p)$.

On imposera à ces fonctions des conditions du type suivant :

$$(3) \quad \begin{cases} (1) & A(x, y, p) \cdot p \geqq a|p|^\alpha - b(x)|y|^\alpha - l(x), \\ (2) & |B(x, y, p)| \leqq d(x)|p|^{\alpha-1} + e(x)|y|^{\alpha-1} + f(x), \\ (3) & |A(x, y, p)| \leqq a^{-1}|p|^{\alpha-1} + g(x)|y|^{\alpha-1} + h(x), \end{cases}$$

où a est une constante positive et $d(x) \in L^r(\Omega)$ avec $r > N$.

Considérons finalement l'inéquation variationnelle

$$(4) \quad u \in V_j; \quad \int_\Omega \{A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla(v-u) + B(x, u, \nabla u)(v-u)\}\, dx \geqq 0, \quad \forall v \in V_j.$$

On appellera problème P_j le « problème » (4) et on écrira $u \in P_j$ pour indiquer que u est une solution de l'inéquation (4).

On démontre les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soit $u \in P_j$ et supposons que les majorations* (3.1) *et* (3.2) *ont lieu; supposons en outre que*

$$(5) \qquad b \in L^p(\Omega), \qquad e \in L^q(\Omega), \qquad l \in L_*^{p_0}(\Omega), \qquad f \in L_*^{q_0}(\Omega),$$

avec $1 < p_0 < N/\alpha < p$ et $q^* = \alpha/(\alpha-1)p$, $q_0^* = \alpha/(\alpha-1)p_0$. Alors

$$u \in L_*^{(\alpha p_0)^*}(\Omega).$$

Théorème II. — *Supposons que les majorations* (3.1) *et* (3.2) *ont lieu avec*

$$(6) \qquad b \in L^p(\Omega), \qquad e \in L^q(\Omega), \qquad l \in L_*^p(\Omega), \qquad f \in L_*^q(\Omega),$$

$p > N/\alpha$ et $q^* = \alpha/(\alpha-1)p$. Alors si $u \in P_j$, on a

$$u \in L^\infty(\Omega).$$

Théorème III. — *Supposons que les majorations* (3) *ont lieu avec*

$$(7) \qquad b, e, l, f \in L^p(\Omega) \qquad \text{et} \qquad g, h \in L^s(\Omega),$$

où $p > N/\alpha$ et $s > N/(\alpha-1)$; soit $\psi \in H^{1,q}(\Omega)$ avec $q > N/\alpha$. Alors il existe une constante positive δ telle que si u est une solution du problème P_j alors

$$u \in C^{0,\delta}(\overline{\Omega}).$$

Remarque. — On trouve aussi des majorations pour $|u|_{(\alpha p_0)^*}$, $\|u\|_\infty$ et $[u]_\delta$ en fonction des données des problèmes.

Les démonstrations de ces résultats seront données en détail dans un article à paraître.

(*) Séance du 22 juin 1970.

(1) Boursier de l'Instituto de Alta Cultura (Portugal).

(*Istituto Matematico,*
Università di Roma, Italia.

182170. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.