(11)

Reprinted from JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS Vol. 45, No. 2, February 1974
 Printed in Belgium

Sur Quelques Inéquations Paraboliques*

HUGO BEIRÃO-DA-VEIGA

Instituto de Física e Matemática, Lisboa-4, Portugal

Submitted by J. L. Lions

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de démontrer des résultats de régularité pour les solutions faibles de certaines *inéquations variationelles* associées à des opérateurs différentiels paraboliques

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} D_j B_j(x, t, u, \nabla u) + B_0(x, t, u, \nabla u)$$

définis dans un cylindre $\Lambda = \Omega \times]0, T[$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On considère des solutions appartenantes à $C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$, avec $V = H^{1,2}(\Omega)$, et on démontre que sous certaines conditions de régularité $| u |^{1/\theta} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$ où $\theta \in]0, 1[$ est une constante (cf. théorème 2.1). En particulier $u \in L^{q,r}(\Lambda)$ pour les couples (q, r) vérifiant

$$\frac{N}{2q} + \frac{1}{r} = \theta \frac{N}{4}$$

(cf. corollaire 2.2).[1]

On généralise ainsi des résultats de régularité obtenus pour les solutions du problème de Cauchy–Dirichlet pour des opérateurs paraboliques linéaires décrits par O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov et N. N. Ural'ceva dans [4] (cf. [4, chapitre III, théorème 9.1 et son corollaire]). En particulier dans [4] les solutions doivent être bornées dans la frontière laterale du cylindre Λ, propriété qu'on ne peut pas exiger dans notre cas.

Pour démontrer le théorème 2.1 ils nous seront utiles des techniques de O. A. Ladyženskaja et N. N. Ural'ceva (cf. [4, chapitre III, section 9]) et de H. Beirão da Veiga et J. P. Dias (cf. [3]).

* Travail exécuté pendant que l'auteur était professeur visiteur chez la "Scuola Normale Superiore di Pisa," invité par le "Consiglio Nazionale delle Ricerche."

[1] On a annoncé dans [2] des résultats du type de ceux donnés dans le corollaire 2.2; en effet on peut les obtenir avec les téchniques employées dans [2] mais on n'obtient pas le théorème 2.1.

On énonce les résultats pour une classe de convexes qui contient en particulier le convexe

$$\mathbb{K}_1 = \{v \in V: v \geqslant 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \tag{0.1}$$

ce qui correspond au problème (cf. J. L. Lions et G. Stampacchia [6], J. L. Lions [5], etc.) $Lu = 0$ sur Λ, $u = u_0$ (donné) pour $t = 0$,

$$u \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} (D_j B_j) \cdot n_j \geqslant 0, \qquad u \sum_{j=1}^{N} D_j B_j = 0 \qquad \text{dans} \qquad \partial\Omega \times]0, T[,$$

avec n_j composantes de la normale extérieure;

Il y a d'autres problèmes d'interêt qui verifient les conditions imposées. Par exemple, et en se bornant au cas des équations, on a le problème de Cauchy–Neumann $Lu = 0$ dans Λ, $u = u_0$ pour $t = 0$,

$$\sum_{j=1}^{N} (D_j B_j)\, n_j = 0 \qquad \text{dans} \qquad \partial\Omega \times]0, T[,$$

et le problème mêlé $Lu = 0$ dans Λ, $u = u_0$ pour $t = 0$,

$$\sum_{j=1}^{N} (D_j B_j)\, n_j = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Gamma_1 \times]0, T[,$$

$u = 0$ dans $\Gamma_2 \times]0, T[$, avec $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

Finalement on remarque que les résultats de régularité démontrés au n. 2 sont indépendents du n. 1.

Dans le n. 1 on introduit la nomenclature et on étudie le problème de l'existence de solutions avec des méthodes du type de celles décrites par Lions dans [5] où on renvoie aussi le lecteur.

Le théorème d'existence donné dans [3] n'est pas suffisant dans notre cas car la condition (0.14) de [3] est trop forte par rapport aux conditions du théorème de regularité. On affaiblira alors l'hypothèse (0.14)[2] soit dans le théorème III soit dans le théorème 3.1 (nomenclature de [3]) en obtenant ainsi les théorèmes 1.2 et 1.4 respectivement. Les démonstrations de ces deux théorèmes restent analogues à celles de [3] et on les écrira partiellement par commodité du lecteur.

Finalement on remarque que les résultats de régularité décrits dans le n. 2 restent valables pour des solutions plus faibles, à savoir, pour les fonctions u qui vérifient (1.23) écrite seulement pour $t_0 = 0$, $t_1 = T$. Mais pour éviter des calculs supplémentaires, et aussi puisque on a un théorème d'existence dans la forme plus forte, on se borne aux solutions de (1.23).

[2] On fait aussi d'autres changements moins importants.

1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ, étant Γ lipschitziènne et Ω localement situé d'un seul côté de Γ. Nous réprésentons la mesure de l'ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$ par $|A|$, le point générique de $\mathbb{R}^N$ par $x = (x_1, \ldots, x_N)$ et nous posons $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$. Étant donné $T > 0$ on pose

$$\Lambda_t = \Omega \times]0, t[, \qquad \Lambda_{t,t_1} = \Omega \times]t, t_1[, \qquad \Lambda = \Lambda_T .$$

On introduit les espaces

$$V = H^{1,2}(\Omega), \qquad \mathscr{V} = L^2(0, T; V), \qquad L^{p,s} = L^s(0, T; L^p(\Omega))$$

avec

$$1 \leqslant p, s \leqslant +\infty, \qquad \mathscr{E} = L^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathscr{V}.$$

On indique par commodité $\| \, | \nabla u | \, \|$ avec $\| \nabla u \|$ et on définit

$$| u |^2_{\Lambda_t} = \sup_{]0,t[} \operatorname{ess} \| u \|^2_{2,\Omega} + \| \nabla u \|^2_{2,\Lambda_t} . \tag{1.1}$$

Finalement on pose

$$\begin{aligned} \mathscr{W} &= \{u \in \mathscr{V} : u' \in L^2(0, T; V')\} \equiv \mathscr{V}', \\ \mathscr{W}_1 &= \{u \in \mathscr{V} : u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\} \equiv H^{1,2}(\Lambda), \\ \mathscr{W}_2 &= \{u \in \mathscr{V} : u' \in L^2(0, T; H^{-1,2}(\Omega)\}, \end{aligned}$$

où $u' = du/dt$ est la dérivée au sens des distributions vectorielles. Tous les espaces introduits sont munis de leurs normes naturelles.

On supposera par commodité $N > 2$ les cas $N = 1$ et $N = 2$ s'étudiant d'une façon analogue.

Il est bien connu que

$$\mathscr{W}_1 \subsetneq \mathscr{W} \subsetneq \mathscr{W}_2 \subsetneq \mathscr{E} \subsetneq L^{q,r}(\Lambda) \tag{1.2}$$

avec

$$\frac{N}{2q} + \frac{1}{r} = \frac{N}{4}, \qquad q \in \left[2, 2^* = \frac{2N}{N-2}\right], \qquad r \in [2, \infty] \tag{1.3}$$

et en plus

$$\| u \|_{q,r,\Lambda} \leqslant \| u \|^{\alpha}_{2^*,2,\Lambda} \| u \|^{1-\alpha}_{2,\infty,\Lambda} \tag{1.4}$$

où $\alpha \in [0, 1]$ vérifie

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2^*} + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{N}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{2} . \tag{1.4'}$$

On a aussi le résultat suivant:

PROPOSITION 1.1. *Si*

$$\frac{N}{2q} + \frac{1}{r} > \frac{N}{4} \qquad \textit{avec} \qquad q < 2^*, \quad r < \infty, \tag{1.5}$$

alors l'immersion de $\mathcal{W}_2$ dans $L^{q,r}(\Lambda)$ est compacte.

Démonstration. On voit aisement qu'ils existent q_0 et r_0 tels que

$$q_0 \in]2, 2^*[, \qquad r_0 \in]2, \infty[, \qquad q \leqslant q_0, \qquad r < r_0,$$
$$\frac{N}{2q_0} + \frac{1}{r_0} = \frac{N}{4}.$$

En appliquant le théorème 2b de J. P. Aubin [1] avec $m = 1, j = 0$, $W = \mathcal{W}_2$, $P_0 = P_1 = 2$, $A_0 = V$, $A_1 = H^{-1,2}(\Omega)$, $P = r_0$, $B = L^{q_0}(\Omega)$ on obtient que l'immersion de $\mathcal{W}_2$ dans $L^{q_0, r_0 - \epsilon}(\Lambda)$ est compacte ($\epsilon > 0$). En prenant $\epsilon = r_0 - r$ on obtient la thèse car $q \leqslant q_0$.

On se donne aussi des fonctions réelles $B_k(x, t, y, z)$, $k = 0, 1,..., N$, définies dans $\Lambda \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ mesurables en (x, t) pour tout $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et continues en (y, z) pour presque tout $(x, t) \in \Lambda$. On suppose aussi qu'il existe une constante positive $\bar{a}$ et des fonctions non négatives d, m, g, e, h mesurables dans Λ telles que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et pour presque tout $(x, t) \in \Lambda$ on a

$$\begin{aligned} |B_0(x, t, y, z)| &\leqslant d(x, t)\,|z| + m(x, t)\,|y| + g(x, t), \\ |B_j(x, t, y, z)| &\leqslant \bar{a}\,|z| + e(x, t)\,|y| + h(x, t), \qquad j = 1,..., N, \end{aligned} \tag{1.6}$$

avec

$$d \in L^{N,\infty}(\Lambda), \qquad m \in L^{p_0, s_0}(\Lambda), \qquad g \in L^{2N/(N+2),2}(\Lambda) \tag{1.7}$$

où

$$\frac{N}{2p_0} + \frac{1}{s_0} = 1, \qquad s_0 \in]2, \infty], \tag{1.7'}$$

et

$$e^2 \in L^{p,s}(\Lambda), \qquad h \in L^{2,2}(\Lambda) \tag{1.8}$$

où

$$\frac{N}{2p} + \frac{1}{s} = 1, \qquad s \in]1, \infty]. \tag{1.8'}$$

On peut définir pour presque tous les $t \in]0, T[$ la fonction

$$a(t; u, v) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} B_j(x, t, u, \nabla u)\, D_j v\, dx + \int_{\Omega} B_0(x, t, u, \nabla u)\, v\, dx, \qquad \forall u, v \in V. \tag{1.9}$$

D'après (1.6), (1.7), (1.7′), (1.8), (1.8′) il s'ensuit que (pour presque tous les $t \in]0, T[$) $B_j(x, t, u, \nabla u) \in L^2(\Omega)$ et $B_0(x, t, u, \nabla u) \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ pour tout $u \in V$ et par conséquent on peut définir $A(t)\colon V \to V'$ par

$$(A(t)\, u, v) = a(t; u, v), \qquad \forall u, v \in V. \tag{1.10}$$

Introduisons maintenant un opérateur $A\colon \mathscr{E} \to \mathscr{V}'$ de la façon suivante: pour chacun $u \in \mathscr{E}$ on pose

$$[Au, v] = \int_0^T (A(t)\, u(t), v(t))\, dt, \qquad \forall v \in \mathscr{V}. \tag{1.11}$$

où $[\cdot, \cdot]$ est la dualité entre les espaces $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{V}$.

Définissons maintenant r_0 et q_0 par

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{s_0}, \qquad \frac{N}{2q_0} + \frac{1}{r_0} = \frac{N}{4}; \qquad \text{on a} \qquad r_0 \in [2, \infty[. \tag{1.12}$$

Posons par définition $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1)$ et $\bar{\alpha} = 2\alpha'$ si $\alpha \in [1, \infty]$; on a

$$\frac{N}{2\bar{p}} + \frac{1}{\bar{s}} = \frac{N}{4} \qquad \text{et} \qquad \bar{s} \in [2, \infty[. \tag{1.13}$$

D'après (1.6), (1.7), (1.8), (1.12) et (1.13) il s'ensuit

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} B_0(x, t, u, \nabla u)\, v\, dx\, dt \right| \leqslant \mathscr{C}(1 + \| u \|_{q_0, r_0} + \| \nabla u \|_{2,2}) \| v \|_{2^*, 2}$$

et

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} B_j(x, t, u, \nabla u)\, D_j v\, dx\, dt \right| \leqslant \mathscr{C}(1 + \| u \|_{\bar{p}, \bar{s}} + \| \nabla u \|_{2,2}) \| \nabla v \|_{2,2}$$

et par conséquent on a pour tout $u \in \mathscr{E}$

$$\left| \int_0^T (A(t)\, u(t), v(t))\, dt \right| \leqslant \mathscr{C}(1 + \| u \|_{\bar{p}, \bar{s}} + \| u \|_{q_0, r_0} + \| \nabla u \|_{2,2}) \| v \|_{\mathscr{V}}$$

$$\leqslant \mathscr{C}(1 + \| u \|_{\mathscr{E}}) \| v \|_{\mathscr{V}}, \qquad \forall v \in \mathscr{V};$$

Alors (1.11) définit en effet un opérateur $A: \mathscr{E} \to \mathscr{V}'$ et en outre

$$\begin{aligned} \| Au \|_{\mathscr{V}'} &\leqslant \mathscr{C}(1 + \| u \|_{\bar{p},\bar{s}} + \| u \|_{q_0,r_0} + \| \nabla u \|_{2,2}) \\ &\leqslant \mathscr{C}(1 + \| u \|_{\mathscr{E}}) \qquad \forall u \in \mathscr{E}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

On supposera aussi valable la condition suivante

Si u_n, $u \in \mathscr{W}_2$, $u_n \to u$ dans $\mathscr{W}_2$ faible et

$$\limsup \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\, u_n(t), u_n(t) - u(t))\, dt \leqslant 0$$

alors

$$\begin{aligned} &\liminf \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\, u_n(t), u_n(t) - v(t))\, dt \\ &\geqslant \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\, u(t), u(t) - v(t))\, dt, \qquad \forall v \in \mathscr{W}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ici

$$0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T.$$

Pour une condition suffisante pour avoir (1.15) cf. le théorème 1.4.

Soit finalement $\mathbb{K}$ un convexe fermé non vide de V tel qu'il existe un opérateur (opérateur de penalisation; cf. [5]) $\beta: V \to V'$, borné, hemicontinu[3] et monotone tel que

$$\mathbb{K} = \{v \in V: \beta(v) = 0\}, \tag{1.16}$$

$$\| \beta v \|_{V'} \leqslant \mathscr{C}(1 + \| v \|_V), \qquad \forall v \in V, \tag{1.17}$$

$$(\beta v, w) = 0, \qquad \forall v \in V, \qquad \forall w \in H_0^{1,2}(\Omega). \tag{1.18}$$

Si on considère le convexe $\mathbb{K}_1$ défini dans (0.1) on peut prendre β donné par

$$(\beta v, w) = -\int_\Gamma v^- w\, d\Gamma, \qquad \forall v, w \in V,$$

où $v^- = -\min(v, 0)$.

Soit $\mathscr{K}$ le convexe fermé non vide de $\mathscr{V}$

$$\mathscr{K} = \{v \in \mathscr{V}: v(t) \in \mathbb{K} \text{ p.p. dans }]0, T[\}$$

[3] i.e. $(\beta(u + tv), w)$ est une fonction continue de $t \in \mathbb{R}$ pour tous $u, v, w \in V$.

et posons pour chaque $v \in \mathscr{V}$

$$(\bar{\beta}v)(t) = \beta(v(t)), \qquad t \in]0, T[. \tag{1.19}$$

On a

$$\bar{\beta}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}', \qquad \| \bar{\beta}v \|_{\mathscr{V}'} \leqslant \mathscr{C}(1 + \| v \|_{\mathscr{V}}), \qquad \forall v \in \mathscr{V}, \tag{1.20}$$

$$\begin{gathered} \bar{\beta} \text{ est borné, hemi-continu, monotone et} \\ \mathscr{K} = \{v \in \mathscr{V}: \bar{\beta}v = 0\}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Finalement soit $u_0 \in \mathbb{K}$ tel que

$$\begin{gathered} \frac{[Av, v - u_0]}{\| v \|_{\mathscr{V}}} \to +\infty \qquad \text{si} \qquad \| v \|_{\mathscr{V}} \to \infty \\ \text{avec} \qquad v \in \mathscr{W} \qquad \text{et} \qquad v(0) = u_0 \end{gathered} \tag{1.22}$$

ou plus généralement tel qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\begin{gathered} \frac{[Av + \epsilon_0^{-1}\bar{\beta}v, v - u_0]}{\| v \|_{\mathscr{V}}} \to +\infty \\ \text{si} \\ \| v \|_{\mathscr{V}} \to +\infty, \qquad v \in \mathscr{W}, \qquad v(0) = u_0 . \end{gathered} \tag{1.22'}$$

On a indiqué par u_0 la fonction $u_0(t) = u_0$, $\forall t \in]0, T[$.

Remarquons que si (1.22') est vérifiée alors elle est encore vérifiée pour chaque ϵ tel que $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$ car

$$[\bar{\beta}v, v - u_0] = [\bar{\beta}v - \bar{\beta}u_0 , v - u_0] \geqslant 0.$$

On a le

THÉORÈME 1.2. *Supposons verifiées les hypothèses* (1.6), (1.7), (1.7'), (1.8), (1.8'), (1.15) *et* (1.22'). *Alors il existe u tel que*

$$\begin{gathered} u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathscr{K}, \qquad u(0) = u_0 \in K, \\ \int_{t_0}^{t_1} (v'(t), v(t) - u(t))\, dt + \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\, u(t), v(t) - u(t))\, dt \\ \geqslant \tfrac{1}{2} \| v(t_1) - u(t_1)\|_{2,\Omega}^2 - \tfrac{1}{2} \| v(t_0) - u(t_0)\|_{2,\Omega}^2 , \qquad \forall v \in \mathscr{W} \cap \mathscr{K}, \end{gathered} \tag{1.23}$$

pour chaque couple t_0 , t_1 *verifiant* $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T$.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{W}$. D'après (1.4) et (1.13) il s'ensuit

$$\begin{gathered} \| u \|_{\bar{p},\bar{s}} \leqslant \| u \|_{2^*,2}^{\alpha} \| u \|_{2,\infty}^{1-\alpha} \leqslant \mathscr{C} \| u \|_{\mathscr{V}}^{\alpha} (\| u \|_{\mathscr{V}} + \| u' \|_{\mathscr{V}'})^{1-\alpha} \\ \text{avec} \\ \alpha = \frac{2}{\bar{s}} \in]0, 1] \end{gathered} \tag{1.24}$$

car $\mathscr{V} \subsetneq L^{2^*,2}(\Lambda)$ et $\mathscr{W} \subsetneq \mathscr{E}$. De même en utilisant (1.12) on obtient

$$\| u \|_{q_0,r_0} \leqslant \mathscr{C} \| u \|_{\mathscr{V}}^{\alpha_1} (\| u \|_{\mathscr{V}} + \| u' \|_{\mathscr{V}'})^{1-\alpha_1}$$

avec (1.25)

$$\alpha_1 = \frac{2}{r_0} \in]0, 1].$$

D'après (1.14), (1.24) et (1.25) il vient

$$\| Au \|_{\mathscr{V}'} \leqslant \mathscr{C}(1 + \| u \|_{\mathscr{V}} + \| u \|_{\mathscr{V}}^{\alpha} \| u' \|_{\mathscr{V}'}^{1-\alpha} + \| u \|_{\mathscr{V}}^{\alpha_1} \| u' \|_{\mathscr{V}'}^{1-\alpha_1})$$

et en utilisant l'inégalité de Young[4] il s'ensuit que pour chaque $\theta \in]0, 1[$ il existe $\mathscr{C}(\theta)$ tel que

$$\| Au \|_{\mathscr{V}'} \leqslant \mathscr{C}(\theta)\,(1 + \| u \|_{\mathscr{V}}) + \theta \| u' \|_{\mathscr{V}'}, \qquad \forall u \in \mathscr{W}. \tag{1.26}$$

Posons pour chaque ϵ, $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$,

$$B_\epsilon v = A(v + u_0) + \frac{1}{\epsilon} \bar{\beta}(v + u_0), \qquad \forall v \in \mathscr{E}, \tag{1.27}$$

et soit $A_0 \colon \mathscr{E} \to \mathscr{V}'$ donné par $A_0(v) = A(v + u_0)$, $\forall v \in \mathscr{E}$. Voyons que

$$u_n\,,\, u \in \mathscr{W}, \qquad u_n \to u \qquad \text{dans } \mathscr{W} \text{ faible}$$

et

$$\limsup [A_0 u_n\,,\, u_n - u_0] \leqslant 0$$

$$\Rightarrow \liminf [A_0 u_n\,,\, u_n - v] \geqslant [A_0 u, u - v], \qquad \forall v \in \mathscr{W}. \tag{1.28}$$

En effet d'après (1.2) et (1.15) avec $t_0 = 0$, $t_1 = T$ il s'ensuit que A vérifie (1.28). Alors en supposant vérifiées les hypothèses de (1.28) on a

$$\liminf [A(u_n + u_0), u_n + u_0 - v] \geqslant [A(u + u_0), u_n + u_0 - v], \qquad \forall v \in \mathscr{W},$$

car

$$0 \geqslant \limsup [A(u_n + u_0), (u_n + u_0) - (u + u_0)] \qquad \text{et} \qquad u_n + u_0 \to u + u_0$$

dans $\mathscr{W}$ faible; et en posant $v + u_0$ à la place de v on a la thèse.

Soit $\bar{\beta}_0(v) = \bar{\beta}(v + u_0)$. On a d'après (1.21)

$$\bar{\beta}_0 \colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}' \text{ est monotone, hemi-continu et borné.}$$

En particulier $\bar{\beta}_0$ est pseudo-monotone.[5] (1.29)

[4] $ab \leqslant (1/m)\epsilon^m a^m + (m - 1/m)\epsilon^{-m/(m-1)}\, b^{m/(m-1)}$, $a, b \geqslant 0$, $\epsilon > 0$, $m > 1$.

[5] cf. J. L. Lions [5, page 179].

Voyons maintenant que

$$u_n\,,\,u\in\mathscr{W},\qquad u_n\rightharpoonup u\qquad\text{dans }\mathscr{W}\text{ faible}$$

et

$$\begin{aligned}&\limsup[B_\epsilon u_n\,,\,u_n-u]\leqslant 0\\ &\Rightarrow \liminf[B_\epsilon u_n\,,\,u_n-v]\geqslant[B_\epsilon u,\,u-v],\qquad\forall v\in\mathscr{W}.\end{aligned}\tag{1.30}$$

La démonstration suit celle donnée dans J. L. Lions [5, page 189] et on la présente par commodité du lecteur: On a $B_\epsilon=A_0+\epsilon^{-1}\bar{\beta}_0$. Supposons verifiées les hypothèses de (1.30). On a

$$\begin{aligned}&[A_0u_n\,,\,u_n-u]\\ &\quad=[B_\epsilon u_n\,,\,u_n-u]-\epsilon^{-1}[\bar{\beta}_0u_n-\bar{\beta}_0u,\,u_n-u]-\epsilon^{-1}[\bar{\beta}_0u,\,u_n-u]\\ &\quad\leqslant[B_\epsilon u_n\,,\,u_n-u]-\epsilon^{-1}[\bar{\beta}_0u\,,\,u_n-u]\end{aligned}\tag{1.31}$$

et par conséquent

$$\limsup[A_0u_n\,,\,u_n-u]\leqslant 0.\tag{1.32}$$

Alors d'après (1.28) on a pour chaque $v\in\mathscr{W}$

$$\liminf[A_0u_n\,,\,u_n-v]\geqslant[A_0u,\,u-v]\tag{1.33}$$

et en utilisant (1.32) et (1.33) avec $v=u$ il s'ensuit $\lim[A_0u_n\,,\,u_n-u]=0$ et d'après la première identité de (1.31) et l'hypothèse (1.30) on obtient $\limsup[\bar{\beta}_0u_n\,,\,u_n-u]\leqslant 0$. Puisque $\bar{\beta}_0$ est pseudo-monotone il vient

$$\liminf[\bar{\beta}_0u_n\,,\,u_n-v]\geqslant[\bar{\beta}_0u,\,u-v],\qquad\forall v\in\mathscr{V}\supset\mathscr{W}.\tag{1.34}$$

D'après (1.33) et (1.34) il s'ensuit la thèse de (1.30).

Posons

$$D(L)=\{v\in\mathscr{W}:v(0)=0\},\qquad L=d/dt.$$

Alors l'opérateur B_ϵ vérifie les conditions du théorème 1.2 du chapitre 3 de [5, page 319]. En effet (1.30) $\Rightarrow$ (1.36) de [5], et d'après (1.26) et (1.20) on a

$$\|(A_0+\epsilon^{-1}\bar{\beta}_0)\,u\,\|_{\mathscr{V}'}\leqslant\mathscr{C}(1+\|\,u\,\|_{\mathscr{V}})+\theta\,\|\,u'\,\|_{\mathscr{V}'}\,,\qquad\forall u\in\mathscr{W},$$

c'est à dire la condition (1.37) de [5] est valable. Finalement (1.22′) entraîne la condition (1.18) de [5]. Alors il existe v_ϵ tel que

$$\begin{aligned}&v_\epsilon{}'+A(v_\epsilon+u_0)+\frac{1}{\epsilon}\beta(v_\epsilon+u_0)=0,\\ &v_\epsilon(0)=0,\qquad v_\epsilon\in\mathscr{W},\end{aligned}\tag{1.35}$$

qui est la (2.12′) de [3]; et on termine la démonstration comme dans [3] en remarquant que pour obtenir la (2.16) de [3] on utilise

$$[Au_\epsilon\,,\, u_\epsilon - u_0] + \epsilon^{-1}[\bar{\beta} u_\epsilon\,,\, u_\epsilon - u_0] \leqslant 0$$

à la place de $[Au_\epsilon\,,\, u_\epsilon - u_0] \leqslant 0$. On peut utiliser à la place de la (2.26) de [3]

$$u_\epsilon \to u \qquad \text{dans} \qquad L^{2,2}(\Lambda) \text{ fort} \tag{1.36}$$

(conséquence de la proposition 1.1) qui est suffisante pour obtenir la (2.29) de [3].

Maintenant on décrira une condition suffisante pour avoir (1.15). Considérons les hypothèses suivantes

$$z \neq z^* \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} [B_j(x, t, y, z) - B_j(x, t, y, z^*)]\,(z_j - z_j^*) > 0 \tag{1.37}$$
$$\text{pour tout } y \in \mathbb{R} \text{ est pour presque tous les } (x, t) \in \Lambda,$$

$$\text{pour presque tous les } (x, t) \in \Lambda \text{ on a}$$
$$\frac{\sum_{j=1}^{N} B_j(x, t, y, z) \cdot z_j}{|\, z\,|} \to +\infty \tag{1.38}$$
$$\text{si } |\, z\,| \to +\infty \text{ et si } |\, y\,| \text{ reste borné,}$$

et changeons très légèrement les conditions (1.7′) et (1.8′) en supposant que

$$\frac{N}{2p_0} + \frac{1}{s_0} = 1, \qquad s_0 \in [2, \infty], \tag{1.39}$$

et

$$\frac{N}{2p} + \frac{1}{s} < 1. \tag{1.40}$$

Supposons finalement que

$$d^2 \in L^{p_1, s_1}(\Lambda), \qquad m \in L^{p_2, s_2}(\Lambda), \qquad g \in L^{p_3, s_3}(\Lambda), \tag{1.41}$$

avec

$$\frac{N}{2p_1} + \frac{1}{s_1} < 1, \qquad \frac{N}{2p_2} + \frac{1}{s_2} < 1, \qquad \frac{N}{2p_3} + \frac{1}{s_3} < 1 + \frac{N}{4}, \qquad s_3 \in]1, \infty]. \tag{1.41′}$$

On a le

LEMME 1.3. *Les immersions de* $\mathscr{W}_2$ *dans* $L^{\bar{p},\bar{s}}(\Lambda)$, $L^{\bar{p}_1,\bar{s}_1}(\Lambda)$, $L^{\bar{p}_2,\bar{s}_2}(\Lambda)$ *et* $L^{p_3',s_3'}(\Lambda)$ *sont compactes.*

Démonstration. En effet ces couples d'exposants sont dans les conditions de la proposition 1.1. Remarquons que d'après (1.41') on a $p_3' < 2^*$.

Considerons maintenant la condition suivante:

Soient u_n, $u \in \mathscr{E}$, $u_n \rightarrow u$ dans $\mathscr{V}$ faible, $u_n \rightarrow u$ dans

$$L^{\bar{p},\bar{s}}(\Lambda), \quad L^{\bar{p}_1,\bar{s}_1}(\Lambda), \quad L^{\bar{p}_2,\bar{s}_2}(\Lambda) \quad \text{et} \quad L^{p_3',s_3'}(\Lambda),$$

$$\| u_n \|_{q_0,r_0} \leqslant c^{te}.$$

Alors si

$$\limsup \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\, u_n(t), u_n(t) - u(t))\, dt \leqslant 0$$

on a (1.43)

$$\liminf \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\, u_n(t), u_n(t) - v(t))\, dt$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_1} (A(t)\, u(t), u(t) - v(t))\, dt, \qquad \forall v \in \mathscr{V}.$$

On a le résultat suivant

THÉORÈME 1.4. *Supposons vérifiées les conditions* (1.6), (1.7), (1.39), (1.8), (1.40), (1.41), (1.41') *et les conditions* (1.37), (1.38). *Alors* (1.43) *est valable et en particulier* (1.15) *est valable.*

La démonstration du théorème 1.4 est identique à celle du théorème 3.1 de [3] où on renvoit le lecteur. On veut seulement remarquer les points où les hypothèses faites sont utilisées.

Sans perte de généralité on se borne au cas $t_0 = 0$, $t_1 = T$. Posons pour $u \in \mathscr{E}$, $v, w \in \mathscr{V}$,

$$[A_1(u, v), w] = \sum_{j=1}^{N} \int_\Lambda B_j(x, t, u, \nabla v)\, D_j w\, dx\, dt,$$

$$[A_2(u), w] = \int_\Lambda B_0(x, t, u, \nabla u)\, w\, dx\, dt,$$

$$A(u, v) = A_1(u, v) + A_2(u).$$

On a $A(u) = A(u, u)$ où $A \colon \mathscr{E} \rightarrow \mathscr{V}'$ est l'opérateur introduit dans (1.11).

LEMME 1.6. *Supposons vérifiées les conditions* (1.6), (1.7), (1.39), (1.8), (1.40), (1.37) *et* (1.38); *supposons en outre que*

$$u_n\,, u \in \mathscr{E}, \qquad \| u_n \|_{\mathscr{V}} \leqslant c^{te}, \qquad \| u_n \|_{q_1, r_1} \leqslant c^{te}, \qquad u_n \to u$$

dans $L^{\bar{p}, \bar{s}}(\Lambda)$ *et*

$$[A_1(u_n\,, u_n) - A_1(u_n\,, u), u_n - u] \to 0.$$

Alors

$$B_0(x, t, u_n\,, \nabla u_n) \to B_0(x, t, u, \nabla u)$$

dans $L^{(2^*)', 2}(\Lambda)$ *faible.*

LEMME 1.7. *Supposons vérifiées* (1.6), (1.8), (1.40). *Si* $u_n \to u$ *dans* $L^{\bar{p}, \bar{s}}(\Lambda)$ *alors*

$$B_j(x, t, u_n\,, \nabla v) \to B_j(x, t, u, \nabla v)$$

dans $L^{2,2}(\Lambda)$ *pour chaque* $v \in \mathscr{V}$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$.

LEMME 1.8. *Sous les hypothèses du lemme* 1.6 *on a pour chaque* $v \in \mathscr{V}$

$$A(u_n\,, v) \to A(u, v) \text{ dans } \mathscr{V}' \text{ faible.}$$

LEMME 1.9. *Supposons vérifiées les hypothèses du lemme* 1.7 *et* (1.41) *et supposons en outre que* $u_n\,, u \in \mathscr{E}$, $u_n \to u$ *dans* $\mathscr{V}$ *faible et dans* $L^{\bar{p}_1, \bar{s}_1}(\Lambda)$, $L^{\bar{p}_2, \bar{s}_2}(\Lambda)$ *et* $L^{p_3', s_3'}(\Lambda)$. *Alors si*

$$A(u_n\,, v) \to \psi \text{ dans } \mathscr{V}' \text{ faible}$$

avec $v \in \mathscr{V}$, *on a*

$$[A(u_n\,, v), u_n] \to [\psi, u].$$

D'après les lemmes 1.6, 1.7, 1.8 et 1.9 on démontre que (1.43) est valable de la même façon qu'on démontre dans [3] le théorème 3.1 d'après les lemmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4. Finalement (1.43) entraîne (1.15) d'après le lemme 1.3 et l'immersion $\mathscr{W}_2 \subsetneq L^{q_0, r_0}(\Lambda)$.

2. On supposera dans ce numero que les fonctions $B_k(x, t, y, z)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, vérifient (1.6) et aussi

$$\sum_{j=1}^{N} B_j(x, t, y, z) \cdot z_j \geqslant a \mid z \mid^2 - b(x, t)\, y^2 - f(x, t) \tag{2.1}$$

avec a constante positive et b, f fonctions non négatives.[6] On suppose aussi que

$$e^2 \in L^{p,s}(\Lambda) \quad \text{avec} \quad \frac{N}{2p} + \frac{1}{s} = 1, \qquad h \in L^{2,2}(\Lambda),$$

$$d^2 \in L^{p_1,s_1}(\Lambda), \qquad m \in L^{p_2,s_2}(\Lambda), \qquad b \in L^{p_4,s_4}(\Lambda), \tag{2.2}$$

avec

$$\frac{N}{2p_i} + \frac{1}{s_i} = 1, \qquad s_i \neq \infty, \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, 4,$$

$$g \in L^{p_3,s_3}(\Lambda) \quad \text{avec} \quad \frac{N}{2p_3} + \frac{1}{s_3} = 1 + \theta\frac{N}{4},$$

$$f \in L^{p_5,s_5}(\Lambda) \quad \text{avec} \quad \frac{N}{2p_5} + \frac{1}{s_5} = 1 + \theta\frac{N}{2} \tag{2.3}$$

avec

$$\theta \in]0, 1[.$$

On impose encore les conditions

$$s_3 \in \left[1, \frac{2}{\theta}\right] \left(\Leftrightarrow p_3 \in \left[\frac{2N}{4 + \theta(N-2)}, \frac{2}{\theta}\right]\right),$$
$$s_5 \in \left[1, \frac{1}{\theta}\right] \left(\Leftrightarrow p_5 \in \left[\frac{N}{2 + \theta(N-2)}, \frac{1}{\theta}\right]\right). \tag{2.4}$$

On définit encore $a(t; u, v)$ comme dans (1.9) et l'opérateur $A(t)$: $V \to V'$ comme dans (1.10); remarquer a ce propos que d'après (2.4) on a $p_3 > (2^*)'$,

Étant donnés une fonction w et une constante M on pose, si $M > 0$.

$$\psi_{M,w} = \begin{cases} M & \text{si} \quad M \leqslant w, \\ w & \text{si} \quad 0 \leqslant w \leqslant M, \\ 0 & \text{si} \quad w \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

et on pose, si $M < 0$,

$$\psi_{M,w} = \begin{cases} -M & \text{si} \quad w \leqslant M, \\ -w & \text{si} \quad M \leqslant w \leqslant 0, \\ \ \ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant w. \end{cases} \tag{2.5'}$$

En outre

$$\eta_{M,w} = w\psi_{M,w}^{(2/\theta)-2}. \tag{2.6}$$

En général on posera par commodité ψ et η à la place respectivement de $\psi_{M,w}$ et $\eta_{M,w}$.

[6] Remarquons que (2.1) entraîne (1.38).

Soit $\mathbb{K}$ un convexe fermé non vide de V tel que

$$\begin{gathered}\text{pour chaque } M \text{ réel dans un voisinage de } +\infty \text{ il existe}\\ \lambda > 0 \qquad \text{tel que} \qquad w - \lambda\eta \in \mathbb{K}, \quad \forall w \in \mathbb{K},\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\text{pour chaque } M \text{ réel dans un voisinage de } -\infty \text{ il existe}\\ \lambda > 0 \qquad \text{tel que} \qquad w - \lambda\eta \in \mathbb{K}, \quad \forall w \in \mathbb{K}.\end{gathered} \tag{2.7'}$$

Par exemple si on considère le convexe défini dans (0.1) on a (2.7) avec $\lambda(M) = M^{-(2/\theta)+2}$ (pour chaque $M > 0$) et on a (2.7′) avec

$$\lambda(M) = (-M)^{-(2/\theta)+2}$$

(pour chaque $M < 0$).

THÉORÈME 2.1. *Supposons vérifiées les hypothèses* (1.6), (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.7) *et* (2.7′) *et soit* u *une solution de* (1.23)[7]. *Alors si* $|u_0|^{1/\theta} \in L^2(\Omega)$ *on a*

$$|u|^{1/\theta} \in \mathscr{E}. \tag{2.9}$$

COROLLAIRE 2.2. *Sous les hypothèses du théorème* 2.1 *on a*

$$\begin{gathered}u \in L^{q,r}(\Lambda) \text{ pour tout couple } (q, r) \text{ vérifiant}\\ \frac{N}{2q} + \frac{1}{r} = \theta\frac{N}{4}.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Avant de démontrer le théorème 2.1 nous introduisons quelques définitions et nous ferons quelques remarques qui nous seront utiles. Soit $t_0 \in [0, T[$ tel que

$$|u(t_0, x)|^{1/\theta} \in L^2(\Omega) \tag{2.11}$$

et définissons en outre un opérateur $A\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ par

$$[Au, v] = \int_{t_0}^{t} (A(\tau)\, u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \qquad \forall u, v \in \mathscr{E}, \tag{2.12}$$

où $[\cdot, \cdot]$ représente ici la dualité entre $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}$ et $t \in]t_0, T]$. On a d'après (1.10), (2.12), (1.6), (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) et en utilisant (1.2) et (1.3)

$$\begin{aligned}|[Au, v]| &\leqslant \int_0^T\int_\Omega (\bar{a}\,|\nabla u| + e\,|u| + h)\,|\nabla v|\, dx\, d\tau\\ &\quad + \int_0^T\int_\Omega (d\,|\nabla u| + m\,|u| + g)\,|v|\, dx\, d\tau\\ &\leqslant (\bar{a}\,\|\nabla u\|_{2,2} + \|e\|_{2p,2s} + \|u\|_{\bar{p},\bar{s}} + \|h\|_{2,2})\\ &\quad \cdot \|\nabla v\|_{2,2} + \|d\|_{2p_1,2s_1}\,\|\nabla u\|_{2,2}\,\|v\|_{\bar{p}_1,\bar{s}_1}\\ &\quad + \|m\|_{p_2,s_2}\,\|u\|_{\bar{p}_2,\bar{s}_2}\,\|v\|_{\bar{p}_2,\bar{s}_2} + \|g\|_{p_3,s_3}\,\|v\|_{p_3',s_3'}\\ &\leqslant c(1 + \|u\|_{\mathscr{E}})\,\|v\|_{\mathscr{E}}\end{aligned}$$

[7] Avec $\mathscr{W}_1$ à la place de $\mathscr{W}$ dans (1.23) car les fonctions test v seront toujours prises dans $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{K}$.

car $\mathscr{E}$ est contenu avec immersion continue dans $L^{\bar{p},\bar{s}}(\Lambda)$, $L^{\bar{p}_1,\bar{s}_1}(\Lambda)$, $L^{\bar{p}_2,\bar{s}_2}(\Lambda)$ et $L^{p',s'}_{3}{}_{3}(\Lambda)$. Par conséquence

$$\| Au \|_{\mathscr{E}'} \leqslant c(1 + \| u \|_{\mathscr{E}}), \qquad \forall u \in \mathscr{E}. \tag{2.13}$$

Retournons maintenant aux définitions (2.5) et (2.6). Soit

$$w \in \mathscr{W}_1 = H^{1,2}(\Lambda),$$

$M > 0$ et posons pour le moment, par commodité d'écriture, $t = x_{N+1}$. Alors p.p. dans Λ

$$D_i\psi = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad M \leqslant w, \\ D_i w & \text{si} \quad 0 \leqslant w \leqslant M, \\ 0 & \text{si} \quad w \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, N + 1$, avec $\psi = \psi_{M,w}$. Posons pour $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= \begin{cases} M^\alpha & \text{si} \quad M \leqslant \xi, \\ \xi^\alpha & \text{si} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant M, \\ 0 & \text{si} \quad \xi \leqslant 0, \end{cases} \\ g_2(\xi) &= \max(\xi, M), \\ g(\xi) &= \frac{1}{M} g_1(\xi)\, g_2(\xi), \end{aligned} \tag{2.15}$$

où

$$\alpha = \frac{2}{\theta} - 1 \in]1, \infty[.$$

Les fonction g_1, g_2 et g sont lipschitziènnes dans $\mathbb{R}$ et continuement différentiables dans $\mathbb{R} - \{M\}$. On voit aisément que $\eta(x, t) = g(w(x, t))$ avec $\eta = \eta_{M,w}$ et par conséquent $\eta \in \mathscr{W}_1$ et $D_i\eta(x, x_{N+1}) = g'(w(x, x_{N+1})) \cdot D_i w(x, x_{N+1})$ $(1 \leqslant i \leqslant N + 1)$ avec, si

$$D_i w(x, x_N) = 0, \qquad g'(w(x, x_{N+1}))\, D_i w(x, x_{N+1}) = 0$$

même si dans le point $w(x, x_{N+1})$ la fonction g n'est pas dérivable; on posera alors par commodité $g'(M) = 0$.

En faisant quelques calculs on arrive facilement à

$$D_i\eta = \begin{cases} M^{\alpha-1} D_i w & \text{si} \quad M \leqslant w, \\ \alpha w^{\alpha-1} D_i w & \text{si} \quad 0 \leqslant w \leqslant M, \\ 0 & \text{si} \quad w \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

D'après (2.16), (2.5) et (2.14) il découle

$$D_i\eta = \psi^{\alpha-1} D_i w + (\alpha - 1)\, \psi^{\alpha-1} D_i\psi, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N + 1, \tag{2.17}$$

pour chaque $w \in \mathscr{W}_1$.

Ces résultats restent valables si la fonction w n'a pas toutes les dérivées premières. En particulier si $w \in L^2(0, T; V)$ alors (2.14), (2.16) et (2.17) restent valables pour $i = 1,\ldots, N$.

Préliminaires pour la Démonstration du Théorème 2.1. Soient u_n des fonctions définies par[8]

$$\frac{1}{n} u_n' + u_n = u, \qquad u_n(0) = u_0 , \tag{2.18}$$

pour $n = 1, 2,\ldots$. On a d'après la théorie des semigroupes fortement continus (cf. [5, chapitre 2, Section 9])

$$u_n \in \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{K}, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}&u_n \to u \text{ dans } \mathscr{V} \text{ et dans } C^0([0, T]; L^2(\Omega)); \text{ en particulier}\\ &u_n \to u \text{ dans } \mathscr{E} \text{ et par conséquent } u_n \to u \text{ dans } L^{q,r}(\Lambda)\\ &\text{avec } q, r \text{ vérifiant } (1.3).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Si on pose $v = u_n$ et $t_0 = 0$, $t_1 = T$ dans l'inéquation (1.23) on obtient, en utilisant (2.20),

$$\frac{1}{n} \int_0^T \| u_n'(t)\|_{2,\Omega}^2 \, dt \to 0. \tag{2.21}$$

On fixe $M > 0$ et on pose par commodité

$$\psi = \psi_{M,u} , \qquad \eta = \eta_{M,u} , \qquad \psi_n = \psi_{M,u_n} ,$$
$$\eta_n = \eta_{M,u_n} \qquad \text{et} \qquad \| \cdot \| = \| \cdot \|_{2,\Omega} .$$

On a d'après (2.20)

$$\begin{aligned}&\eta_n \to \eta \text{ dans } \mathscr{V} \text{ et dans } C^0([0, T]; L^2(\Omega))\\ &\qquad \text{et en particulier dans } \mathscr{E},\end{aligned} \tag{2.22}$$

car $\eta = g(u)$, $\eta_n = g(u_n)$. La convergence dans $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ est évidente et en particulier celle dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Si $D_i\eta_n \to D_i\eta$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ est fausse (pour un certain i, $1 \leqslant i \leqslant N$) il existe une suite extraite $D_i\eta_\nu$ qui reste au dehors d'un certain voisinage de $D_i\eta$; en outre d'après (2.20) on peut supposer que $u_\nu \to u$ ponctuellement presque partout dans Λ. On a alors avec $y = (x, t) \in \Lambda$

$$\begin{aligned}&D_i\eta_\nu(y) - D_i\eta(y)|\\ &\qquad \leqslant | g'(u_\nu(y))| \cdot | D_iu_\nu(y) - D_iu(y)| + | D_iu(y)| \cdot | g'(u_\nu(y)) - g'(u(y))| .\end{aligned} \tag{2.23}$$

[8] On suit pour le moment la méthode employée dans [3].

Le premier terme du deuxième membre de (2.23) converge vers 0 dans $L^2(\Lambda)$. Le deuxième terme converge aussi vers 0 comme conséquence du théorème de Lebesgue; en effet il est ponctuellement borné par $c\,|\,D_i u(y)|\in L^2(\Lambda)$ et en outre dans l'ensemble où $u(y)=M$ on a $D_i u(y)=0$[9] et dans l'ensemble où $u(y)\neq M$ on a $|\,g'(u_\nu(y))-g'(u(y))|\to 0$ car g' est continue dans les points $u(y)$.

Soit maintenant λ le nombre positif associé par (2.7) à M. La fonction

$$v_n = u_n - \lambda\eta_n \in \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{K}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} (u_n' + Au, u_n - v_n)\, d\tau &= \int_{t_0}^{t} (v_n' + Au, u - v_n)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} (Au, u_n - u)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} (u_n', u_n - u)\, d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} (u_n' - v_n', u_n - v_n)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} (u_n' - v_n', u - u_n)\, d\tau. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Étudions séparément les termes du deuxième membre de (2.24). D'après l'inéquation (1.23) on a

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} (v_n' + Au, u - v_n)\, d\tau &\leqslant \tfrac{1}{2}\,\|\, u - v_n \|^2 \Big|_{t}^{t_0} \\ &= \tfrac{1}{2}\,\|\, u - u_n + \lambda\eta_n \|^2 \Big|_{t}^{t_0}. \end{aligned} \qquad (2.25)$$

Par ailleurs (2.20) entraîne

$$\left| \int_{t_0}^{t} (Au, u_n - u)\, d\tau \right| \leqslant \|\, Au \,\|_{\mathscr{E}'}\, \|\, u_n - u \,\|_{\mathscr{E}} \to 0 \qquad (2.26)$$

et (2.21) entraîne

$$\int_{t_0}^{t} (u_n', u_n - u)\, d\tau = -\frac{1}{n} \int_{t_0}^{t} \|\, u_n' \,\|^2\, d\tau \to 0. \qquad (2.27)$$

On a encore

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} (u_n' - v_n', u_n - v_n)\, d\tau &= \tfrac{1}{2}\,\|\, u_n - v_n \|^2 \Big|_{t_0}^{t} \\ &= \lambda^2\, \tfrac{1}{2}\,\|\, \eta_n \|^2 \Big|_{t_0}^{t}. \end{aligned} \qquad (2.28)$$

[9] Presque partout.

Voyons finalement que

$$\int_{t_0}^{t} (u_n' - v_n', u - u_n)\, d\tau \to 0; \tag{2.29}$$

on a d'après (2.17), (2.18) et (2.14)

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} (u_n' - v_n', u - u_n)\, d\tau \\
&\quad = \frac{\lambda}{n} \int_{t_0}^{t} (\eta_n', u_n')\, d\tau \\
&\quad = \frac{\lambda}{n} \int_{t_0}^{t} (\psi_n^{\alpha-1} u_n', u_n')\, d\tau + \frac{\lambda(\alpha-1)}{n} \int_{t_0}^{t} (\psi_n^{\alpha-1} \psi_n', u_n')\, d\tau \\
&\quad \leqslant \frac{\lambda}{n} M^{\alpha-1} \int_{t_0}^{t} \| u_n' \|^2\, d\tau + \frac{\lambda(\alpha-1)}{n} M^{\alpha-1} \int_{t_0}^{t} \| u_n' \|^2\, dt
\end{aligned}$$

et d'après (2.21) il s'ensuit (2.29).

En utilisant (2.24),..., (2.29) et aussi (2.20), (2.22) on a

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} (u_n' + Au, u_n - v_n)\, d\tau \\
&\quad \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \| u - u_n + \lambda\eta_n \|^2 \Big|_{t_0}^{t} + \frac{\lambda^2}{2} \| \eta_n \|^2 \Big|_{t_0}^{t} \right) = 0,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} (u_n' + Au, \eta_n)\, d\tau \leqslant 0. \tag{2.30}$$

D'autre côté on voit aisément que (cf. [4, chapitre III, (9.5)])

$$\int_{t_0}^{t} (u_n', \eta_n)\, d\tau = \tfrac{1}{2} \| u_n \psi_n^{(1/\theta)-1} \|^2 \Big|_{t_0}^{t} - \tfrac{1}{2} (1-\theta) \| \psi_n^{1/\theta} \|^2 \Big|_{t_0}^{t}. \tag{2.31}$$

D'après (2.30) et (2.31) il s'ensuit

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \tfrac{1}{2} \| u_n \psi_n^{(1/\theta)-1} \|^2 \Big|_{t_0}^{t} - \tfrac{1}{2}(1-\theta) \| \psi_n^{1/\theta} \|^2 \Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} (Au, \eta_n)\, d\tau \right\} \leqslant 0. \tag{2.32}$$

Remarquons que

$$u_n \psi_n^{(1/\theta)-1} = (1/M)\, g_1(u_n)\, g_2(u_n) \quad \text{et} \quad \psi_n^{1/\theta} = g_1(u_n)$$

avec g_1 et g_2 donnés par (2.15) cette fois avec $\alpha = 1/\theta \in]1, \infty[$; en particulier on a, en utilisant (2.20),

$$u_n\psi_n^{(1/\theta)-1} \to u\psi^{(1/\theta)-1} \quad \text{et} \quad \psi_n^{1/\theta} \to \psi^{1/\theta} \quad \text{dans} \quad C^0([0, T]; L^2(\Omega)). \tag{2.33}$$

D'après (2.32), (2.33) et (2.22) il s'ensuit

$$\tfrac{1}{2} \| u\psi^{(1/\theta)-1} \|^2 \Big|_{t_0}^{t} - \tfrac{1}{2}(1-\theta) \| \psi^{1/\theta} \|^2 \Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} (Au, \eta)\, d\tau \leqslant 0 \tag{2.34}$$

ce qui correspond à la formule (9.6) du chapitre III de [4]. Dorénavant la démonstration est analogue à celle donnée dans [4]: On a d'après la définition de ψ

$$\frac{1-\theta}{2} \| u(t)\, \psi(t)^{(1/\theta)-1} \|^2 \geqslant \frac{1-\theta}{2} \| \psi(t)^{1/\theta} \|^2,$$

$$\tfrac{1}{2} \| \, | u(t_0)|^{1/\theta} \|^2 \geqslant \tfrac{1}{2} \| u(t_0)\, \psi(t_0)^{(1/\theta)-1} \|^2,$$

$$\tfrac{1}{2} \| \psi(t_0)^{1/\theta} \|^2 \geqslant (\theta/2) \| \psi(t_0)^{1/\theta} \|^2,$$

et par conséquence

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \| u(t)\, \psi(t)^{(1/\theta)-1} \|^2 - \tfrac{1}{2} \| u(t_0)\, \psi(t_0)^{(1/\theta)-1} \|^2 - \tfrac{1}{2} \| \psi(t)^{1/\theta} \|^2 + \tfrac{1}{2} \| \psi(t_0)^{1/\theta} \|^2 \\ &\quad + (\theta/2) \| \psi(t)^{1/\theta} \|^2 - (\theta/2) \| \psi(t_0)^{1/\theta} \|^2 \\ &\quad \geqslant (\theta/2) \| u(t)\, \psi(t)^{(1/\theta)-1} \|^2 - \tfrac{1}{2} \| \, | u(t_0)|^{1/\theta} \|^2. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Mais puisque la somme des deux premiers termes dans le premier membre de (2.34) est égale au premier membre de (2.35) on obtient

$$\begin{aligned} &(\theta/2) \int_\Omega u^2(t)\, \psi(t)^{(2/\theta)-2}\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t}\!\! \int_\Omega B_j(x, t, u, \nabla u)\, D_j\eta\, dx\, d\tau \\ &\quad \leqslant \tfrac{1}{2} \int_\Omega | u(t_0)|^{2/\theta}\, dx - \int_{t_0}^{t}\!\! \int_\Omega B_0(x, t, u, \nabla u)\, \eta\, dx\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Voyons maintenant que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} B_j(x, t, u, \nabla u)\, D_j\eta \\ &\quad \geqslant a\theta \, | \nabla(u\psi^{(1/\theta)-1})|^2 \\ &\quad - (2/\theta - 1)\, b(u\psi^{(1/\theta)-1})^2 - (2/\theta - 1) f \, | u\psi^{(1/\theta)-1} |^{2(1-\theta)}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

En effet dans les points où $0 \leqslant u \leqslant M$ on à d'après (2.16) et (2.1)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} B_j\, D_j\eta &= \sum_{j=1}^{N} (2/\theta - 1)\, u^{(2/\theta)-2} B_j\, D_j u \\ &\geqslant (2/\theta - 1)\, u^{(2/\theta)-2}\{a\,|\,\nabla u\,|^2 - b\,|\,u\,|^2 - f\}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

D'un autre côté[10] $u\psi^{(1/\theta)-1} \in L^2(0, T; V)$ avec

$$D_i(u\psi^{(1/\theta)-1}) = \begin{cases}(1/\theta)\,\psi^{(1/\theta)-1}\, D_i u & \text{si} \quad 0 \leqslant u \leqslant M, \\ \psi^{(1/\theta)-1}\, D_i u & \text{si} \quad u \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad M \leqslant u,\end{cases} \tag{2.39}$$

et par conséquent (où $0 \leqslant u \leqslant M$)

$$u^{(2/\theta)-2}\,|\,\nabla u\,|^2 = \psi^{(2/\theta)-2}\,|\,\nabla u\,|^2 = \theta^2\,|\,\nabla(u\psi^{(1/\theta)-1})|^2. \tag{2.40}$$

D'après (2.38), (2.40),

$$u^2 u^{(2/\theta)-2} = (u\psi^{(1/\theta)-1})^2 \qquad \text{et} \qquad u^{(2/\theta)-2} = (u\psi^{(1/\theta)-1})^{2(1-\theta)}$$

il s'ensuit (2.37).

Dans les points où $u \geqslant M$ ou $u \leqslant 0$ on a d'après (2.16) et (2.1)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} B_j\, D_j\eta &= \sum_{j=1}^{N} \psi^{(2/\theta)-2} B_j\, D_j u \\ &\geqslant \psi^{(2/\theta)-2}\{a\,|\,\nabla u\,|^2 - b\,|\,u\,|^2 - f\};\end{aligned} \tag{2.41}$$

d'après (2.39) il vient

$$\psi^{(2/\theta)-2}\,|\,\nabla u\,|^2 = |\,\nabla(u\psi^{(1/\theta)-1})|^2 \tag{2.42}$$

et en outre

$$\psi^{(2/\theta)-2} u^2 = (u\psi^{(1/\theta)-1})^2, \qquad \psi^{(2/\theta)-2} \leqslant |\,u\psi^{(1/\theta)-1}\,|^{2(1-\theta)} \tag{2.43}$$

car $|\,\psi\,| \leqslant |\,u\,|$. Les majorations (2.41), (2.42) et (2.43) entraînent (2.37).

De même

$$|\,B_0(x, t, u, \nabla u)\,\eta\,| \leqslant (d\,|\,\nabla u\,| + m\,|\,u\,| + g)\,|\,u\,|\,\psi^{(2/\theta)-2}$$

et on démontre, en considérant séparément les deux cas $0 \leqslant u \leqslant M$ et $u \leqslant 0$ ou $u \geqslant M$, que

$$\begin{aligned}&|\,B_0(x, t, u, \nabla u)\,\eta\,| \\ &\quad \leqslant d\,|\,u\psi^{(1/\theta)-1}\,|\,|\,\nabla(u\psi^{(1/\theta)-1})| + m(u\psi^{(1/\theta)-1})^2 + g\,|\,u\psi^{(1/\theta)-1}\,|^{2-\theta}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

[10] On démontre (2.39) en remarquant que $u\psi^{(1/\theta)-1} = (1/M)\, g_1(u)\, g_2(u)$ avec g_1 et g_2 donnés par (2.15), $\alpha = 1/\theta$; et $u \in L^2(0, T; V)$.

Posons par commodité $v = u\psi^{(1/\theta)-1}$. D'après (2.36), (2.37) et (2.44) on obtient en utilisant

$$d \mid v \mid \mid \nabla v \mid \leqslant \frac{\epsilon}{2} \mid \nabla v \mid^2 + \frac{1}{2\epsilon} d^2 \mid v \mid^2$$

et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta}{2} \| v(t)\|^2 + a\theta \| \nabla v \|^2_{2,2,A_{t_0},t} \\
&\quad \leqslant \left(\frac{2}{\theta} - 1\right) \| b \|_{p_4,s_4,A_{t_0},t} \| v \|^2_{\bar{p}_4,\bar{s}_4,A_{t_0},t} \\
&\quad + \left(\frac{2}{\theta} - 1\right) \| f \|_{p_5,s_5,A_{t_0},t} \| v \|^{2(1-\theta)}_{\bar{p}_5(1-\theta),\bar{s}_5(1-\theta),A_{t_0},t} \\
&\quad + \frac{\epsilon}{2} \| \nabla v \|^2_{2,2,A_{t_0},t} + \frac{1}{2\epsilon} \| d^2 \|_{p_1,s_1,A_{t_0},t} \| v \|^2_{\bar{p}_1,\bar{s}_1,A_{t_0},t} \\
&\quad + \| m \|_{p_2,s_2,A_{t_0},t} \| v \|^2_{\bar{p}_2,\bar{s}_2,A_{t_0},t} + \| g \|_{p_3,s_3,A_{t_0},t} \| v \|^{2-\theta}_{\bar{p}_3(2-\theta)/2,\bar{s}_3(2-\theta)/2,A_{t_0},t} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \| \mid u(t_0)\mid^{1/\theta} \|^2.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Remarquons maintenant que d'après (2.2), (2.3) et (2.4) les couples d'exposants $(\bar{p}_i, \bar{s}_i)$ $i = 1, 2, 4$, $(\bar{p}_5(1-\theta), \bar{s}_5(1-\theta))$, $(\bar{p}_3(2-\theta)/2, \bar{s}_3(2-\theta)/2)$ vérifient la condition (1.3); en outre si un couple (q, r) vérifie (1.3) on a[11]

$$\| u \|_{q,r,A_{t_0},t} \leqslant \beta \mid u \mid_{A_{t_0},t}$$

où on peut supposer β indépendant de t_0 et t (il dépend de T). Alors d'après (2.45) écrite pour $\epsilon = a\theta$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta}{2} \| v(t)\|^2 + \frac{a\theta}{2} \| \nabla v \|^2_{2,2,A_{t_0},t} \\
&\quad \leqslant \left[\left(\frac{2}{\theta} - 1\right) \beta^2 \| b \|_{p_4,s_4,A_{t_0},t} + \| d^2 \|_{p_1,s_1,A_{t_0},t} \right.\\
&\quad \left. + \| m \|_{p_2,s_2,A_{t_0},t}\right] \mid v \mid^2_{A_{t_0},t_1} \\
&\quad + \left(\frac{2}{\theta} - 1\right) \beta^{2(1-\theta)} \| f \|_{p_5,s_5,A_{t_0},t} \mid v \mid^{2(1-\theta)}_{A_{t_0},t} \\
&\quad + \beta^{2-\theta} \| g \|_{p_3,s_3,A_{t_0},t} \mid v \mid^{2-\theta}_{A_{t_0},t} + \tfrac{1}{2} \| \mid u(t_0)\mid^{1/\theta} \|^2.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

[11] C'est une conséquence de (1.4) écrite pour le cylindre A_{t_0},t et de la majoration de Sobolev

$$\| u \|_{2^*,\Omega} \leqslant c(\| u \|_{2,\Omega} + \| \nabla u \|_{2,\Omega}).$$

Prenons maintenant $t_1 \in]t_0, T]$ et faisons t parcourir $[t_0, t_1]$; on obtient d'après (2.46)

$$\nu \mid v \mid^2_{A_{t_0,t}} \leqslant \text{deuxième membre de (2.46) écrite avec } t_1 \text{ à la place de } t,$$

où $\nu = (1/2)(\theta/2)\min(1, a)$. En utilisant l'inégalité de Young il vient

$$\begin{aligned}\nu \mid v \mid^2_{A_{t_0,t_1}} \leqslant & \Big[\Big(\frac{2}{\theta} - 1\Big)\beta^2 \| b \|_{p_4,s_4,A_{t_0,t_1}} \\ & + \| d^2 \|_{p_1,s_1,A_{t_0,t_1}} + \| m \|_{p_2,s_2,A_{t_0,t_1}} + (1-\theta)\,\epsilon^{1/(1-\theta)} \\ & + \Big(1 - \frac{\theta}{2}\Big)\epsilon^{2/(2-\theta)}\Big] \mid v \mid^2_{A_{t_0,t_1}} + \theta\Big(\frac{2}{\theta} - 1\Big)^{1/\theta}\beta^{2((1/\theta)-1)} \\ & \cdot \epsilon^{-1/\theta} \| f \|^{1/\theta}_{p_5,s_5,A} + \frac{\theta}{2}\beta^{2((2/\theta)-1)}\epsilon^{-2/\theta} \| g \|^{2/\theta}_{p_3,s_3,A} \\ & + \tfrac{1}{2} \| \mid u(t_0) \mid^{1/\theta} \|^2\end{aligned}$$

avec $\epsilon > 0$ arbitraire. On fixe ϵ tel que

$$(1-\theta)\,\epsilon^{1/(1-\theta)} + \Big(1 - \frac{\theta}{2}\Big)\epsilon^{2/(2-\theta)} = \frac{\nu}{4}$$

et on choisit t_1 de façon que

$$\| d^2 \|_{p_1,s_1,A_{t_0,t_1}} + \| m \|_{p_2,s_2,A_{t_0,t_1}} + \Big(\frac{2}{\theta} - 1\Big)\beta^2 \| b \|_{p_4,s_4,A_{t_0,t_1}} \leqslant \frac{\nu}{4} \tag{2.47}$$

ce qui est possible car $s_i \neq \infty$, $i = 1, 2, 4$. Il s'ensuit

$$\frac{\nu}{2} \mid v \mid^2_{A_{t_0,t_1}} \leqslant c_1 \| f \|^{1/\theta}_{p_5,s_5} + c_2 \| g \|^{2/\theta}_{p_3,s_3} + \tfrac{1}{2} \| \mid u(t_0) \mid^{1/\theta} \|^2 \tag{2.48}$$

avec c_1 et c_2 dépendentes seulement de θ, β et ν.

Si $M \to +\infty$ alors v converge en croisant ponctuellement vers la fonction

$$u[\max(u, 0)]^{(1/\theta)-1} = \max(u, 0)^{1/\theta}$$

et puisque

$$\| v \|^2_{2,2,A_{t_0,t_1}} \leqslant \text{constante indépendente de } M,$$

il s'ensuit, d'après le lemme de Fatou et le théorème de Lebesgue, que $v \to \max(u, 0)^{1/\theta}$ dans $L^2(t_0, t_1; L^2(\Omega))$. Et en utilisant (2.48) on obtient

$$\max(u, 0)^{1/\theta} \in L^2(t_0, t_1; V) \cap L^\infty(t_0, t_1; L^2(\Omega)). \tag{2.49}$$

Remarquons maintenant que la fonction $-u(x, t)$ est solution de (1.23) avec u_0 remplacé par $-u_0$, $\mathbb{K}$ et $\mathscr{K}$ remplacés respectivement par $-\mathbb{K}$ et

$-\mathscr{K}$ et l'opérateur $A(t)$ remplacé par l'opérateur $\bar{A}(t)$ relatif aux fonctions $\bar{B}_k(x, t, y, z) = -B_k(x, t, -y, -z)$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Et les fonctions $\bar{B}_k$ vérifient encore les majorations (1.6), (2.1). En outre (2.7') est equivalent à la condition

pour chaque M réel dans un voisinage de $+\infty$ il existe $\lambda > 0$ tel que $w - \lambda\eta \in -\mathbb{K}$, $\forall w \in -\mathbb{K}$,

c'est à dire $-\mathbb{K}$ vérifie (2.7). Alors si t_0 et t_1 vérifient respectivement (2.11) et (2.47) on a, en utilisant (2.49) pour la fonction $-u$,

$$|\min(u, 0)|^{1/\theta} \in L^2(t_0, t_1; V) \cap L^\infty(t_0, t_1; L^2(\Omega)).$$

Puisque

$$|u|^{1/\theta} = \max(u, 0)^{1/\theta} + |\min(u, 0)|^{1/\theta}$$

on a finalement la

PROPOSITION 2.3. *Si t_0 vérifie* (2.11) *et t_1 vérifie* (2.47) *alors*

$$|u|^{1/\theta} \in L^2(t_0, t_1; V) \cap L^\infty(t_0, t_1; L^2(\Omega)). \tag{2.50}$$

Démonstration du théorème 2.1. Si la valeur $t_1 = T$ vérifie (2.47) le théorème est démontré d'après la proposition 2.3. Autrement on choisit $t_1 \in]0, T[$ tel que (2.47) soit vérifié avec le signe "$=$" et avec $t_0 = 0$. D'après la proposition 2.3 (2.50) est valable et par conséquence t_1 vérifie (2.11); on choisit alors $t_2 \in]t_1, T]$ de façon que (2.47) soit vérifiée dans le cylindre Λ_{t_1, t_2} et (toujours d'après la proposition 2.3) on obtient

$$|u|^{1/\theta} \in L^2(t_1, t_2; V) \cap L^\infty(t_1, t_2; L^2(\Omega)),$$

c'est à dire,

$$|u|^{1/\theta} \in L^2(t_0, t_2; V) \cap L^\infty(t_0, t_2; L^2(\Omega)).$$

Si $t_2 < T$ on continue la démonstration de la même façon jusqu'à arriver à une valeur $t_n = T$; il reste à démontrer qu'on arrive toujours à la valeur T avec un nombre fini de cylindres $\Lambda_{t_i, t_{i+1}}$: soient n_1, n_2 et n_3 le nombre (eventuellement infini) de cylindres $\Lambda_{t_i, t_{i+1}}$ où respectivement

$$\| d^2 \|_{p_1, s_1, \Lambda_{t_i, t_{i+1}}} \geq \frac{\nu}{12}, \tag{2.51}$$

$$\| m \|_{p_2, s_2, \Lambda_{t_i, t_{i+1}}} \geq \frac{\nu}{12}, \tag{2.51'}$$

$$\left(\frac{2}{\theta} - 1\right) \beta^2 \| b \|_{p_4, s_4, \Lambda_{t_i, t_{i+1}}} \geq \frac{\nu}{12}. \tag{2.51''}$$

Dans chaque cylindre (sauf éventuellement le dernier s'il existe un dernier) on a par construction

$$\| d^2 \|_{p_1, s_1, A_{t_i, t_{i+1}}} + \| m \|_{p_2, s_2, A_{t_i, t_{i+1}}} + \left(\frac{2}{\theta} - 1\right) \beta^2 \cdot \| b \|_{p_4, s_4, A_{t_i, t_{i+1}}} = \frac{\nu}{4}$$

et par conséquent le nombre total n de cylindres vérifie $n \leqslant n_1 + n_2 + n_3 + 1$. Or

$$\begin{aligned} \| d^2 \|_{p_1, s_1}^{s_1} &= \int_0^T \| d^2 \|_{p_1, \Omega}^{s_1} \, dt \\ &\geqslant \sum \| d^2 \|_{p_1, s_1, A_{t_i, t_{i+1}}}^{s_1} \\ &\geqslant \left(\frac{\nu}{12}\right)^{s_1} n_1 \end{aligned}$$

où la somme s'étend aux cylindres où (2.51) est vérifiée. Alors

$$n_1 \leqslant \| d^2 \|_{p_1, s_1}^{s_1} \left(\frac{12}{\nu}\right)^{s_1}.$$

En raisonnant de même avec n_2 et n_3 on démontre que

$$n \leqslant \| d^2 \|_{p_1, s_1}^{s_1} \left(\frac{12}{\nu}\right)^{s_1} + \left(\frac{12}{\nu}\right)^{s_2} \| m \|_{p_2, s_2}^{s_2} + \left[\frac{\nu}{12\beta^2(2/\theta - 1)}\right]^{s_4} \| b \|_{p_4, p_4}^{s_4} + 1.$$

Bibliographie

1. J. P. Aubin, Un théorème de compacité, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **256** (1963), 5042–5044.
2. H. Beirão da Veiga, Un principe de maximum pour les solutions d'une classe d'inéquations paraboliques quasi-linéaires (à paraître).
3. H. Beirão da Veiga et J. P. Dias, Sur l'existence et la régularité des solutions faibles d'une inéquation parabolique non linéaire, *J. Reine Angew. Math.* **260** (1973), 181–199.
4. O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, "Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type" (trad. S. Smith), American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968.
5. J. L. Lions, "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires," Dunod et Gauthier-Villars, 1969.
6. J. L. Lions and G. Stampacchia, Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.* **20** (1967), 493–519.

Printed by the St Catherine Press Ltd., Tempelhof 37, Bruges, Belgium.