UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Crescita di gruppi: un gruppo con crescita intermedia

CANDIDATO:
Ludovico Battista

RELATORE:
Prof. Roberto Frigerio

ANNO ACCADEMICO 2014/2015

Indice

Introduzione

Scopo della seguente trattazione è la presentazione della funzione di crescita di un gruppo e la costruzione di un gruppo che abbia crescita intermedia, ossia superpolinomiale e subesponenziale.

Nel primo capitolo sarà definita la crescita di un gruppo, e verranno dimostrati alcuni risultati preliminari che saranno poi utilizzati più volte. In particolare dimostreremo che la funzione di crescita di un gruppo è sempre equivalente a quella di un suo sottogruppo di indice finito, e svilupperemo due risultati tecnici ma essenziali per stimare la velocità della funzione di crescita di un gruppo sotto ipotesi che torneranno convenienti nel prosieguo.

Obiettivo del secondo capitolo è collegare il concetto di crescita di un gruppo ad argomenti che, a prima vista, appaiono indipendenti. In particolare ci muoveremo verso dei risultati classici che collegano la crescita del gruppo fondamentale di una varietà con delle proprietà di crescita del volume delle palle nel suo rivestimento universale, per poi terminare con un risultato concreto su una specifica varietà.

Nel terzo capitolo arriveremo finalmente alla costruzione di un gruppo di crescita intermedia. Lo presenteremo come un sottogruppo del gruppo di automorfismi di un albero binario infinito e completo. Studieremo diverse proprietà soddisfatte dai generatori di tale sottogruppo e alcune relazioni tra elementi e loro immagini attraverso opportuni omomorfismi, che ci aiuteranno ad ottenere i risultati voluti.

L'importanza dell'esempio appena costruito vuole essere discussa nel quarto capitolo, dove risultati più profondi e complicati vengono presentati con lo scopo di allacciare gli argomenti trattati alla ricerca contemporanea sull'argomento.

Capitolo 1

Crescita di un gruppo

1.1 La funzione di crescita

Dati un gruppo G e un insieme finito di generatori $S = \{s_1; \ldots; s_k\}$, definiamo la funzione

$$l_S : G \to \mathbb{N}$$

che ad un elemento g associa la lunghezza minima di una rappresentazione di g come prodotto di elementi di S o di S^{-1}. Quando la notazione sarà chiara, ometteremo il pedice. Questa funzione è ben definita poiché S è un insieme di generatori. Denotiamo con

$$\gamma_G^S(n) = |l^{-1}(\{0; 1; \ldots; n\})|,$$

ossia il numero di elementi che è possibile creare con parole lunghe al più n. Si noti che, per motivi di combinatoria, vale $\gamma_G^S(n) \leq (2k+1)^n$.

Osservazione 1.1. Se G è un gruppo infinito, la funzione γ_G^S è strettamente crescente.

Dimostrazione. La funzione γ_G^S è chiaramente debolmente crescente. Inoltre, poiché il gruppo G è infinito, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_G^S(n) = \infty. \tag{\%}$$

Se esistesse un $m \in \mathbb{N}$ tale che $\gamma_G^S(m) = \gamma_G^S(m+1)$, allora vorrebbe dire che valgono le seguenti uguaglianze:

$$l^{-1}(\{0; 1; \ldots; m\}) =$$
$$\{x \cdot s \mid x \in l^{-1}(\{0; 1; \ldots; m\}),\ s \in S\} = l^{-1}(\{0; 1; \ldots; m+1\});$$

ma allora, applicando una semplice induzione, si otterrebbe $\gamma_G^S(N) = \gamma_G^S(m)$ per ogni $N > m$. Questo è in contraddizione con (%). $\square$

Osservazione 1.2. La funzione γ_G^S è submoltiplicativa, ossia:

$$\gamma_G^S(n+m) \leq \gamma_G^S(n)\gamma_G^S(m).$$

Dimostrazione. Basta considerare la funzione

$$P : l^{-1}(\{0;1;\ldots;m\}) \times l^{-1}(\{0;1;\ldots;n\}) \to l^{-1}(\{0;1;\ldots;m+n\})$$

che associa ad una coppia di elementi (g_1, g_2) il loro prodotto $g_1g_2 = P((g_1, g_2))$. Essa è chiaramente surgettiva, in quanto ogni parola di lunghezza al più $m+n$ può essere vista come la concatenazione di una parola di lunghezza al più m e di una parola di lunghezza al più n. Questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 1.3. *L'Osservazione 1.2 fornisce un metodo alternativo per dimostrare che $\gamma_G^S(n) \leq (2k+1)^n$, infatti*

$$\gamma_G^S(n) \leq \prod_{j=1}^{n} \gamma_G^S(1) \leq (2k+1)^n.$$

1.2 Un preordine sulle funzioni di crescita

Vogliamo dotare l'insieme delle funzioni di crescita di un preordine. Date due funzioni di crescita γ_G^S e $\gamma_{G'}^{S'}$ scriviamo $\gamma_G^S \preceq \gamma_{G'}^{S'}$ se esistono delle costanti $A, C \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\gamma_G^S(n) \leq A\gamma_{G'}^{S'}(Cn).$$

Se $\gamma_G^S \preceq \gamma_{G'}^{S'}$ e $\gamma_G^S \succeq \gamma_{G'}^{S'}$, scriviamo $\gamma_G^S \sim \gamma_{G'}^{S'}$.

Proposizione 1.4. *$\sim$ è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. La riflessività e la simmetria sono ovvie. Per quanto riguarda la transitività, date tre funzioni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tali che $\gamma_1(n) \leq A_1\gamma_2(C_1n)$ e $\gamma_2(n) \leq A_2\gamma_3(C_2n)$, sostituendo si ottiene

$$\gamma_1(n) \leq A_1A_2\gamma_3(C_1C_2n).$$

Ripetendo il ragionamento si ottiene $\gamma_3 \preceq \gamma_1$, da cui la tesi. □

1.3 Alcune proprietà

In questa sezione forniremo alcuni risultati che torneranno molto utili nel corso della nostra trattazione.

La dimostrazione della seguente proposizione, seppur molto semplice, è essenziale per associare ad un gruppo la classe di equivalenza della sua funzione di crescita, tralasciando il particolare insieme di generatori scelto.

Proposizione 1.5. *Dato un gruppo G, siano S_1, S_2 due suoi sottoinsiemi finiti di generatori. Vale*
$$\gamma_G^{S_1} \sim \gamma_G^{S_2}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\gamma_G^{S_1} \preceq \gamma_G^{S_2}$. Dal momento che l'insieme S_1 è finito, esiste il $\max_{s\in S_1} l_{S_2}(s) = M$. Ma allora ogni parola lunga n composta da elementi in S_1 può essere riscritta con Mn elementi di S_2. Questo dimostra

$$\gamma_G^{S_1}(n) \leq \gamma_G^{S_2}(Mn),$$

che è proprio ciò che volevamo. A questo punto, ripetendo il ragionamento nel verso opposto, si ottiene la tesi. □

Da questo momento siamo dunque autorizzati a parlare della *classe di equivalenza della funzione di crescita di G*, senza specificare quale sia l'insieme di generatori preso in considerazione.

Siamo ora pronti per distinguere varie velocità di crescita di una funzione γ. Anticipiamo il fatto che, preso comunque $a > 1$, vale $a^n \sim e^n$; per una dimostrazione si veda il Lemma 1.11.

Definizione 1.6. La funzione di crescita di un gruppo γ si dice *polinomiale* se
$$\exists \alpha > 0 \mid \gamma(n) \sim n^\alpha.$$

Definizione 1.7. La funzione di crescita di un gruppo γ si dice *superpolinomiale* se
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\gamma(n))}{\log(n)} = \infty.$$

Definizione 1.8. La funzione di crescita di un gruppo γ si dice *subesponenziale* se
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\gamma(n))}{n} = 0.$$

Definizione 1.9. La funzione di crescita di un gruppo γ si dice *esponenziale* se

$$\gamma(n) \sim e^n.$$

Diremo che un gruppo ha crescita di un certo tipo se la sua funzione di crescita è di quel tipo. Siamo ora pronti a dare la definizione più importante per la restante trattazione:

Definizione 1.10. Un gruppo si dice avere *crescita intermedia* se la sua funzione di crescita è superpolinomiale e subesponenziale.

Il seguente lemma ci aiuta a comprendere alcune proprietà di queste classi di funzioni di crescita:

Lemma 1.11. *1. Siano $\alpha > \beta > 1$, allora $n^\alpha \nsim n^\beta$.*

2. Siano $\alpha > \beta > 1$, allora $\alpha^n \sim \beta^n$.

Dimostrazione. 1. Supponiamo per assurdo che esistano A, C tali che

$$A(Cn)^\beta \geq n^\alpha \;\Rightarrow\; AC^\beta n^\beta \geq n^\alpha \;\Rightarrow\; AC^\beta \geq n^{\alpha-\beta};$$

ma AC^β è una costante e, poiché $\alpha - \beta > 0$, passando al limite in n si ottiene un assurdo.

2. Chiaramente $\alpha^n \geq \beta^n$. Ora basta scegliere una costante C tale che $\beta^C \geq \alpha$, e si otterrà

$$\beta^{Cn} = (\beta^C)^n \geq \alpha^n.$$

□

Esponiamo un'importante proprietà che dà valore alle definizioni appena date:

Proposizione 1.12. *Siano G un gruppo infinito e $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Allora:*

- *se G ha crescita polinomiale, anche G^m ha crescita polinomiale, ma $\gamma_{G^m} \nsim \gamma_G$.*
- *se G ha crescita esponenziale, anche G^m ha crescita esponenziale e $\gamma_{G^m} \sim \gamma_G$.*

Dimostrazione. Anzitutto facciamo la seguente

Osservazione 1.13. Dati G e S, vale la relazione

$$\gamma_{G^m}^{S^m} = (\gamma_G^S)^m;$$

basta infatti proiettare su ogni componente e ottenere questo risultato.

A questo punto basta applicare le definizioni, infatti nel primo caso esiste $\alpha > 0$ tale che

$$(\gamma_G^S)^m(n) \sim (n^\alpha)^m = n^{\alpha m},$$

mentre nel secondo caso

$$(\gamma_G^S)^m(n) \sim (e^n)^m = (e^m)^n.$$

Basta ora applicare il Lemma 1.11 per ottenere la tesi. □

Dimostriamo ora alcuni risultati che appaiono importanti sia dal punto di vista teorico sia come strumenti per le dimostrazioni successive.

Proposizione 1.14. *Sia γ una funzione di crescita di un gruppo G. Allora esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\gamma(n))}{n}.$$

Dimostrazione. Per ogni $t \in \mathbb{N}$, definiamo $k_t(s) = \left\lfloor \frac{s}{t} \right\rfloor + 1$. Chiaramente vale $tk_t(s) \geq s$, da cui

$$\gamma(s) \leq \gamma(k_t(s)t) \leq \gamma(t)^{k_t(s)} \leq \gamma(t)^{1+\frac{s}{t}}.$$

Esponenziando per $\frac{1}{s}$ si ottiene

$$\gamma(s)^{\frac{1}{s}} \leq \gamma(t)^{(1+\frac{s}{t})\cdot\frac{1}{s}} = \gamma(t)^{(\frac{1}{t}+\frac{1}{s})}.$$

Passando al lim sup otteniamo

$$\limsup_{s\to\infty} \gamma(s)^{\frac{1}{s}} \leq \limsup_{s\to\infty} \gamma(t)^{(\frac{1}{t}+\frac{1}{s})} = \gamma(t)^{\frac{1}{t}}.$$

Poiché questo vale per ogni t, possiamo scrivere

$$\limsup_{s\to\infty} \gamma(s)^{\frac{1}{s}} \leq \inf_{t\in\mathbb{N}} \{\gamma(t)^{\frac{1}{t}}\};$$

ma poiché vale l'ovvia disuguaglianza

$$\liminf_{s\to\infty} \gamma(s)^{\frac{1}{s}} \geq \inf_{t\in\mathbb{N}} \{\gamma(t)^{\frac{1}{t}}\},$$

la tesi è dimostrata. □

Osservazione 1.15. In virtù della Proposizione 1.14, ha senso parlare dell'*indice di crescita* di un gruppo, definito appunto come quel limite. Dunque, ha sempre senso chiedersi se un gruppo ha crescita esponenziale o subesponenziale.

Lemma 1.16. *Sia $G = \langle s_1, \dots, s_c \rangle$ un gruppo finitamente generato, sia H un suo sottogruppo di indice finito I. Sia $K = \{Id, k_2, \dots, k_I\}$ un insieme di rappresentanti dei laterali destri di H e sia $R : G \to K$ la funzione che associa ad un elemento g il rappresentante della sua classe laterale Hg. Allora*

$$H = \langle W = \{k_i s_j R(k_i s_j)^{-1}\}_{i=1,\dots I, j=1,\dots,c} \rangle.$$

Inoltre, per ogni $h \in H$, vale

$$l_W(h) \leq l_{\{s_1,\dots,s_c\}}(h).$$

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che $k_i s_j R(k_i s_j)^{-1} \in H$ per ogni scelta di indici, infatti

$$k_i s_j \in HR(k_i s_j) \Rightarrow k_i s_j = hR(k_i s_j) \Rightarrow k_i s_j R(k_i s_j)^{-1} = h \in H.$$

A questo punto, dato $h \in H$, consideriamo una sua decomposizione in elementi di S: $h = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_t}$. Consideriamo ora il seguente elemento appartenente a $\langle W \rangle$:

$$s_{i_1} R(s_{i_1})^{-1} \cdot R(s_{i_1}) s_{i_2} R(R(s_{i_1}) s_{i_2})^{-1} \cdot \ldots \cdot R(*) s_{i_t} R(R(*) s_{i_t})^{-1};$$

per costruzione i rappresentanti vicini si semplificano; tale scrittura è quindi uguale a

$$s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_t} R(R(*) s_{i_t})^{-1}.$$

Ma per quanto abbiamo dimostrato prima tale elemento appartiene ad H, e dunque, poiché $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_t} \in H$, necessariamente anche $R(R(*) s_{i_t})^{-1} \in H$, ma allora $R(R(*) s_{i_t})^{-1} = Id$, e dunque

$$h = s_{i_1} R(s_{i_1})^{-1} \cdot R(s_{i_1}) s_{i_2} R(R(s_{i_1}) s_{i_2})^{-1} \cdot \ldots \cdot R(*) s_{i_t} R(R(*) s_{i_t})^{-1}.$$

Si noti che abbiamo trovato una decomposizione di h composta da elementi di W lunga esattamente quanto $l_{\{s_1,\dots,s_c\}}(h)$. Questo concude la dimostrazione. □

Corollario 1.17. *Un sottogruppo di indice finito di un gruppo finitamente generato è finitamente generato.*

Proposizione 1.18. *Siano G un gruppo finitamente generato e $H < G$ un suo sottogruppo tale che $[G : H] = I < \infty$. Allora*

$$\gamma_G \sim \gamma_H.$$

Dimostrazione. Innanzitutto consideriamo un insieme $K \ni Id$ di rappresentanti delle classi laterali destre di H in G. Poiché $G = \langle\{s_1, \ldots, s_c\}\rangle$ vale anche $G = \langle\{s_1, \ldots, s_c\} \cup K\rangle$. Chiamiamo A questo insieme di generatori.

Per ogni $g \in G$, abbiamo due possibili decomposizioni. Una come $g = a_1 \ldots a_t$ e una come $g = hk$, con $h \in H$ e $k \in K$. Ma poiché $k \in A$, possiamo scrivere $h = a_1 \ldots a_t k^{-1}$, e dunque

$$l_A(h) \leq l_A(g) + 1.$$

D'altra parte, sia W l'insieme di generatori di H come nel Lemma 1.16. Abbiamo già dimostrato

$$l_W(h) \leq l_A(h),$$

ma allora, poiché ogni elemento di lunghezza al più n rispetto ad A deve essere scritto come kh con h di lunghezza al più $n+1$ rispetto ad W, vale

$$\gamma_H^W(n+1)I \geq \gamma_G^A(n).$$

Visto che per definizione ci servono delle costanti A, C tali che $\gamma_H^W(Cn)A \geq \gamma_G^A(n)$, basta scrivere

$$\gamma_H^W(2n)I \geq \gamma_G^A(n),$$

da cui $\gamma_H \succeq \gamma_G$. Per l'altra minorazione basta considerare γ_H^W e $\gamma_G^{A\cup W}$, e si ottiene chiaramente la stima $\gamma_G^{A\cup W}(n) \geq \gamma_H^W(n)$, da cui la tesi.

□

Concludiamo il capitolo con due lemmi molto tecnici che risulteranno essenziali al raggiungimento del risultato descritto nel terzo capitolo.

1.4 Il lemma della stima dal basso

Lemma 1.19. *Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una funzione monotona crescente, tale che $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m > 1$ e $f \succeq f^m$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tale che $f(n) \succeq \exp(n^\alpha)$.*

Dimostrazione. Per facilitare la dimostrazione consideriamo l'estensione della funzione f alla retta dei reali positivi, definendo:

$$\bar{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$\bar{f}(x) \to f(\lfloor x \rfloor).$$

Dimostriamo che $\bar{f}$ gode della stessa proprietà di cui gode f. Per definizione si ha

$$f^m(n) \leq Df(En);$$

basta ora applicare la seguente catena di disuguaglianze

$$f^m(\lfloor x \rfloor) \leq Df(E\lfloor x \rfloor) \leq Df(\lfloor Ex \rfloor).$$

Notiamo che, chiamate $\alpha = \frac{1}{E}$ e $C = \frac{1}{D}$, vale

$$\bar{f}(x) \geq C\bar{f}^m(\alpha x).$$

Per semplicità, confondiamo $\bar{f}$ con f. Senza perdita di generalità, consideriamo la funzione f moltiplicata per una costante K in modo che $Kf(0) > 3$, infatti, per la definizione di crescita equivalente, ciò non cambia la sua classe di equivalenza, né quella di $\bar{f}$. Inoltre, dal momento che, data una costante $m > 1$, vale

$$f \succeq g \Rightarrow f^m \succeq g^m,$$

da cui

$$f \succeq f^m \succeq f^{m^2} \succeq f^{m^3} \ldots \succeq f^{m^s} \ldots,$$

sappiamo che esiste $m \geq 2$ tale che $f \succeq f^m$.

Sia ora $\pi(n) = \log f(n)$. La funzione $\pi(n)$ è una funzione monotona crescente, tale che $\pi(0) > 1$ e $\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \infty$. Ciò che vogliamo dimostrare è

$$\exists A, \nu \in \mathbb{R}^+ \mid \pi(n) \geq An^\nu.$$

Come abbiamo visto, $f \succeq f^m \Leftrightarrow f(n) \geq Cf^m(\alpha n)$ per qualche $\alpha, C > 0$. Passando ai logaritmi

$$\pi(n) \geq m\pi(\alpha n) + c \qquad (\clubsuit)$$

dove $c = \log(C)$.

Dimostriamo che $\alpha < 1$. Se per assurdo $\alpha \geq 1$, allora

$$-c \geq m\pi(\alpha n) - \pi(n) \geq m\pi(n) - \pi(n) = (m-1)\pi(n).$$

Ma quest'ultima espressione tende a infinito per $n \to \infty$, e non può quindi essere limitata da una costante.

Applicando ora la disuguaglianza ($\clubsuit$) agli elementi della forma $\alpha^r n$ si ottiene

$$\pi(\alpha^r n) \geq m\pi(\alpha^{r+1}n) + c.$$

Partendo ora da $\pi(n)$ iteriamo questa disuguaglianza:

$$\pi(n) \geq m\pi(\alpha n) + c \geq m(m\pi(\alpha^2 n) + c) = m^2\pi(\alpha^2 n) + c(m+1) \geq \ldots$$

In conclusione, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\pi(n) \geq m^k \pi(\alpha^k n) + c \sum_{j=0}^{k-1} m^j. \qquad (\diamondsuit)$$

Dimostriamo che $c < 0$. In caso contrario, infatti, si avrebbe

$$\pi(n) \geq m^k \pi(\alpha^k n) + c \sum_{j=0}^{k-1} m^j \geq \pi(0) m^k;$$

ma in tale espressione, nel limite per $k \to \infty$, il membro a sinistra è una costante, mentre il membro a destra tende all'infinito.

Dunque $c < 0$. Poiché $m \geq 2$, vale $m^k > \sum_{j=0}^{k-1} m^j$, da cui la $(\diamondsuit)$ implica

$$\pi(n) > m^k \pi(\alpha^k n) + c m^k = m^k (\pi(\alpha^k n) + c).$$

Sia s il più piccolo naturale tale che $\pi(s) > 1 - c$. Sia inoltre $k = \lfloor \log_\alpha \frac{s}{n} \rfloor$. Chiaramente $\alpha^k n \geq s$, da cui $\pi(\alpha^k n) + c \geq \pi(s) + c \geq 1$. Dall'equazione precedente si conclude che

$$\pi(n) \geq m^k.$$

Sia

$$\nu = \log_\alpha \frac{1}{m};$$

vale

$$\frac{m^k}{m^{-1}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu(k+1)} = \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k+1}\right)^{\nu} \geq \left(\frac{n}{s}\right)^{\nu},$$

da cui

$$\pi(n) \geq m^k \geq \frac{m}{s^\nu} n^\nu,$$

il che conclude la dimostrazione.

$\square$

1.5 Il lemma della stima dall'alto

Prima di procedere con la dimostrazione, introduciamo una notazione. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una funzione monotona crescente. Denotiamo con

$$f^{\star k}(n) = \sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in \underline{\mathcal{Q}}_k(n)} f(n_1) \ldots f(n_k);$$

dove con $\underline{\mathcal{Q}}_k(n)$ si intendono le k-uple di naturali non nulli $(n_1, \ldots, n_k)$ tali che $\sum_{i=1}^k n_i \leq n$. Chiaramente anche $f^{\star k}$ si estende in modo banale a tutta la semiretta dei reali positivi.

Lemma 1.20. *Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una funzione monotona crescente tale che $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Se esistono $k \geq 2$, $C > 0$, $0 < \alpha < 1$ tali che $f(n) \leq Cf^{\star k}(\alpha n)$, allora esiste $\beta < 1$ tale che $f(n) \preceq \exp(n^\beta)$.*

Dimostrazione. Come prima, sia $\pi(n) = \log f(n)$. Siano inoltre $A > 0, 0 < \nu < 1$ due costanti tali che

$$k\left(\frac{\alpha}{k}\right)^\nu = 1 - \epsilon < 1;$$

$$\pi(1) \leq A \ \wedge \ \forall n \ (\log C + k \log \alpha + k \log n) \leq \epsilon A n^\nu.$$

Dimostriamo per induzione che

$$\pi(n) \leq An^\nu.$$

Il passo base vale per definizione. Sia ora n arbitrario. Per ipotesi

$$f(n) \leq C \sum_{(n_1,\ldots,n_k)\in\underline{\mathcal{Q}}_k(\alpha n)} f(n_1)\ldots f(n_k) \leq C(\alpha n)^k \sup_{(n_1,\ldots,n_k)\in\underline{\mathcal{Q}}_k(\alpha n)} \{f(n_1)\ldots f(n_k)\}.$$

Infatti la sommatoria è su al più $(\alpha n)^k$ termini. Per stimare quel sup, passiamo al logaritmo e usiamo la disuguaglianza di Hölder e l'ipotesi induttiva, ottenendo:

$$\log[f(n_1)\ldots f(n_k)] \leq \pi(n_1) + \ldots + \pi(n_k) \leq$$
$$A(n_1^\nu + \ldots + n_k^\nu) \leq Ak\left(\frac{\alpha n}{k}\right)^\nu \leq An^\nu(1-\epsilon).$$

Ma allora

$$\pi(n) = \log(f(n)) \leq \log(C) + \log((\alpha n)^k) + An^\nu(1-\epsilon) \leq$$

$$(\log(C) + k\log(\alpha) + k\log(n)) + An^\nu(1-\epsilon) \leq An^\nu$$

per la scelta di A.

□

Capitolo 2

Relazioni con il gruppo fondamentale

2.1 Due importanti teoremi di Milnor

In questa sezione vogliamo avvicinarci a due risultati molto profondi che mettono in relazione la crescita del π_1 di una varietà con la crescita del volume delle palle nel suo rivestimento universale.

Lemma 2.1. *Siano M una k-varietà Riemanniana connessa e $\tilde{M}$ il suo rivestimento universale. Sia $V_x(r)$ il volume della palla $B(x, r)$, calcolato utilizzando la funzione di distanza Riemanniana e la forma di volume Riemanniana. Se esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $x \in \tilde{M}$ vale*

$$V_x(r) \leq cr^k,$$

allora la funzione di crescita di ogni possibile sottogruppo G di $\pi_1(M)$ finitamente generato soddisfa

$$\gamma_G(n) \preceq n^k.$$

Dimostrazione. Identificheremo $\pi_1(M)$ con il gruppo degli automorfismi di rivestimento di $\tilde{M}$ su M. Siano $x_0 \in \tilde{M}$ un punto base, $g_1, \ldots, g_p : \tilde{M} \to \tilde{M}$ i generatori del sottogruppo G, e sia μ il massimo tra i valori $d(x_0, g_i(x_0))$ per $i = 1, \ldots, p$. Si noti che la palla $B(x_0, \mu n)$ contiene almeno $\gamma_G(n)$ punti distinti della forma $g(x_0)$ con $g \in \pi_1(M)$: tali g sono infatti delle isometrie, e dunque

$$d(g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_s}(x_0), g_{i_2} \ldots g_{i_s}(x_0)) = d(g_{i_1}(x_0), x_0).$$

A questo punto basta iterare la disuguaglianza tiangolare ed utilizzare il fatto che automorfismi di rivestimento distinti mappano un punto in punti distinti.

Sia ora $\epsilon > 0$ tale che $B(x_0, \epsilon)$ è disgiunta da tutti i traslati $g(B(x_0, \epsilon))$ con $g \in \pi_1(M) \smallsetminus \{Id\}$. Tale ϵ esiste per definizione di rivestimento. A questo punto l'intorno $B(x_0, \mu n + \epsilon)$ contiene almeno $\gamma_G(n)$ insiemi disgiunti di volume $V(\epsilon) = V_{x_0}(\epsilon)$. Dunque

$$\gamma_G(n) V(\epsilon) \leq V(\mu n + \epsilon).$$

Ma a questo punto basta usare l'ipotesi per ottenere

$$\gamma_G(n) \leq \frac{V(\mu n + \epsilon)}{V(\epsilon)} \leq \frac{c(\mu n + \epsilon)^k}{V(\epsilon)} \leq \frac{c n^k (\mu + \frac{\epsilon}{n})^k}{V(\epsilon)} \leq \frac{c(\mu + \epsilon)^k}{V(\epsilon)} n^k;$$

da cui la tesi. □

Lemma 2.2. *Siano M una varietà Riemanniana connessa e compatta e $\tilde{M}$ il suo rivestimento universale. Sia $V_x(r)$ il volume della palla $B(x, r)$, calcolato utilizzando la funzione di distanza Riemanniana e la forma di volume Riemanniana. Se esistono costanti $R, c, \lambda > 0$ tali che per ogni $x \in \tilde{M}$ vale*

$$V_x(r) > c \exp(\lambda r),$$

allora vale

$$\gamma(n) \sim e^n.$$

Dimostrazione. Sia

$$\delta = \max_{M \times M} d$$

il diametro di M. Per ogni punto $x_0 \in \tilde{M}$, chiaramente $p : \tilde{M} \to M$ mappa $\overline{B(x_0, \delta)} = N$ su tutto M. Inoltre l'insieme dei traslati gN al variare di $g \in \pi_1(M)$ ricopre tutto $\tilde{M}$, poiché esiste sempre un automorfismo di rivestimento che porta x_0 in un qualsiasi punto in $p^{-1}(p(x_0))$.

Il ricoprimento dato da questi traslati è localmente finito: se infatti non lo fosse, si potrebbe considerare un raggio r tale che la palla $B(x_0, r)$ intersechi infiniti gN. Preso ora un ϵ tale che i $g(B(x_0, \epsilon))$ siano a due a due disgiunti, si avrebbe che $B(x_0, r + \delta + \epsilon)$ conterrebbe infinite palle disgiunte, ognuna di volume $V_{x_0}(\epsilon) > 0$. Poiché $V_{x_0}(r + \delta + \epsilon) < \infty$ abbiamo ottenuto il risultato voluto.

Sia ora F l'insieme dei $g \in \pi_1(M)$ tali che i traslati gN intersecano N. Sia $\nu > 0$ il minimo di $d(gN, N)$ al variare di g in $\mathrm{Aut}(p) \smallsetminus F$. Tale ν è un minimo poiché, se fosse un inf, l'intorno di N di raggio $\nu + 1$ intersecherebbe infiniti gN; è inoltre maggiore di 0 poiché gN e N sono compatti (per il teorema di Hopf-Rinow, in quanto anche $\tilde{M}$ è completo) e disgiunti.

Dimostriamo ora che, se $d(x_0, gN) < \nu t + \delta$ per qualche intero positivo t, allora g può essere espressa come un prodotto di t elementi in F; ossia

$$g = f_{i_1} \dots f_{i_t}.$$

Preso infatti $y \in gN$ tale che $d(x_0, y) < \nu t + \delta$ e considerata la geodetica minimale tra x_0 e y, consideriamo su di essa una sequenza di punti

$$y_1, y_2, \dots, y_{t+1} = y,$$

tali che

$$d(x_0, y_1) < \delta \ \wedge \ d(y_i, y_{i+1}) < \nu.$$

Ogni y_i appartiene ad un certo h_iN, e possiamo scegliere $h_1 = Id$ e $h_{t+1} = g$. Sia ora $f_i = h_i^{-1}h_{i+1}$, in modo che $f_1f_2 \dots f_t = g$. Dal momento che $h_i^{-1}y_i$ e $h_i^{-1}y_{i+1}$ sono distanti meno di ν (gli h_i sono isometrie) e appartengono, rispettivamente, a N e a f_iN, segue dalla definizione di ν che $f_i \in F$.

Abbiamo dunque dimostrato che l'intorno $B(x_0, \nu t + \delta)$ è ricoperto da $\gamma^F_{\pi_1(M)}(t) = \gamma(t)$ copie di N, da cui

$$\gamma(t)V_{x_0}(\delta) \geq V_{x_0}(\nu t + \delta);$$

dunque per t abbastanza grandi si ha

$$\gamma(t) \geq \frac{V_{x_0}(\nu t + \delta)}{V_{x_0}(\delta)} \geq \frac{c \cdot \exp(\lambda(\nu t + \delta))}{V_{x_0}(\delta)} = \frac{c \cdot \exp(\lambda\delta)}{V_{x_0}(\delta)} \exp(\lambda\nu t).$$

Dunque $\gamma(n) \succeq e^n$. D'altra parte $\gamma(n) \preceq \|F\|^n \sim e^n$ per il Lemma 1.11, da cui la tesi.

$\square$

è possibile utilizzare questi due lemmi per ottenere due teoremi presentati da John Milnor in [Mil68], che arrivano, attraverso le disuguaglianze di Bishop e Günter, agli stessi risultati, partendo però da ipotesi molto più deboli. Concludiamo la sezione citandoli:

Teorema 2.3. *Sia M una k-varietà Riemanniana completa e connessa il cui tensore di curvatura di Ricci è ovunque semidefinito positivo. Allora la funzione di crescita di ogni possibile sottogruppo G di $\pi_1(M)$ finitamente generato soddisfa*

$$\gamma_G(n) \preceq n^k.$$

Teorema 2.4. *Sia M una varietà Riemanniana connessa e compatta con tutte le curvature sezionali minori di 0. Allora vale*

$$\gamma_{\pi_1(M)}(n) \sim e^n.$$

2.2 Un risultato inaspettato

Concludiamo il capitolo con un risultato derivante dai teoremi appena citati. Chiamiamo G il gruppo di Lie costituito dalle matrici triangolari superiori 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ con 1 sulla diagonale e H il suo sottogruppo costituito da quelle a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

Proposizione 2.5. *Non esiste alcuna metrica Riemanniana su* $G/_H$ *che rientri nelle ipotesi di uno dei Teoremi 2.3 o 2.4.*

Dimostrazione. Sappiamo che $G/_H$ è una 3-varietà compatta con $\pi_1(G/_H) = H$. Se dimostriamo che la funzione di crescita di H è tale che

$$\gamma_H(n) \prec e^n \ \wedge \ \gamma_H(n) \succ n^3$$

abbiamo concluso. In particolare dimostreremo

$$\gamma_H(n) \sim n^4.$$

Siano infatti

$$x = I + e_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ y = I + e_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

due generatori di H. Sia inoltre $c = [y^{-1}, x^{-1}] = yxy^{-1}x^{-1} = I + e_{13}$.

Si noti che vale

$$x^i y^j c^k = \begin{pmatrix} 1 & j & k \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

vogliamo ora dimostrare che un elemento della forma $x^t y^t c^k$, con $0 \leq k \leq t^2$, ha lunghezza minore o uguale a $2t$ rispetto al set di generatori $\{x; y\}$. Per fare questo scopriamo cosa accade moltiplicando a sinistra per x e y le matrici che stiamo prendendo in considerazione:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$y \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & b+c \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

a questo punto basta scrivere k come combinazione lineare dei numeri $0, 1, \ldots, t-1, t$ con somma dei coefficienti uguale a t. Poiché questo è sempre possibile abbiamo ottenuto il risultato voluto. Osserviamo ora che vale

$$x^t y^{t-j} x^{-i} (x^i y^j c^k) = x^t y^t c^k$$

e dunque tutte le matrici della forma $x^i y^j c^k$ con $0 \leq i \leq t$, $0 \leq j \leq t$ e $0 \leq k \leq t^2$ hanno lunghezza minore o uguale a $5t$. Dunque vale

$$\gamma(5t) \geq t^4.$$

D'altra parte, se una matrice $x^i y^j c^k$ ha lunghezza minore o uguale a s, per ovvi motivi $|i| \leq s$ e $|j| \leq s$, e vale anche $|k| \leq (\frac{s}{2})^2$, infatti

$$\max_{\sum_i x_i = n,\ x_i \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{s-n} x_i i \right) = \max_{n \leq s} (n(s-n)) = \left(\frac{s}{2} \right)^2;$$

ma allora vale

$$\gamma(s) \leq (2s+1) \cdot (2s+1) \cdot \left(2 \left(\frac{s}{2} \right)^2 + 1 \right) \leq 14 s^4,$$

da cui la tesi. □

Capitolo 3

Un gruppo con crescita intermedia

Nel corso di questo capitolo costruiremo un gruppo di crescita intermedia seguendo l'esposizione di Grigorchuk in [Gri08].

3.1 Il gruppo di automorfismi di un albero

Sia $\boldsymbol{T}$ un albero binario infinito e completo e sia V l'insieme dei suoi vertici. Chiaramente esiste una bigezione naturale tra V e le sequenze finite di 0 o 1. Si noti che la radice dell'albero, che chiameremo $\boldsymbol{r}$, corrisponde alla parola vuota $\emptyset$. Se orientiamo i rami dell'albero in maniera che si allontanino da $\boldsymbol{r}$, otteniamo un grafo orientato. Denotiamo con E l'insieme dei lati. Chiamiamo *livello* la lunghezza della sequenza associata a v e lo indichiamo con $|v|$. Chiamiamo infine $\boldsymbol{T}_v$ il sottoalbero che ha come radice v, che è chiaramente isomorfo a $\boldsymbol{T}$.

Vogliamo studiare il gruppo degli automorfismi di $\boldsymbol{T}$, che chiameremo $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$. Esso è costituito dalle bigezioni di V in se stesso che mandano lati in lati. Chiaramente ogni automorfismo fissa $\boldsymbol{r}$, e dunque conserva il livello di ciascun vertice.

Il primo esempio di automorfismo è fornito dallo *scambio* tra l'albero di sinistra e quello di destra. Formalmente, tale automorfismo agisce in questo modo

$$a(0x_1x_2\ldots) = (1x_1x_2\ldots); \quad a(1y_1y_2\ldots) = (0y_1y_2\ldots).$$

Chiaramente tale automorfismo può essere applicato a partire da ogni vertice v, ottenendo una famiglia di automorfismi $\{a_v\}_{v\in V}$.

Per definizione ogni automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$ manda i lati $(v, v0)$ e $(v, v1)$ nei lati $(\tau(v), \tau(v)0)$ e $(\tau(v), \tau(v)1)$, eventualmente non in quest'ordine. Definiamo il *segno dell'automorfismo τ nel vertice v* in questo modo:

$$\epsilon_v(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{se } \tau(v0) = (\tau(v)0) \ \wedge \ \tau(v1) = (\tau(v)1) \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si noti che i valori $\{\epsilon_v(\tau)\}_{v \in V}$ identificano univocamente l'automorfismo τ, e che per ogni scelta arbitraria di valori di ciascun $\{\epsilon_v\}_{v \in V}$ esiste un automorfismo τ che ha essi come segni dei vertici.

Osservazione 3.1. Grazie alla seguente considerazione, è facile dimostrare che, chiamato B_m il sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$ composto dai τ tali che $\epsilon_v(\tau) = 0$ per tutti i vertici di livello minore di m, vale

$$[\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) : B_m] \leq 2^{2^m - 1}.$$

Infatti i vertici di livello minore di m sono proprio $2^m - 1$, e a questo punto basta costruire per ogni possibile sottoinsieme C di tali vertici l'automorfismo τ_C tale che

$$\epsilon_v(\tau_C) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \notin C \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dimostriamo che tali $\{\tau_C\}_{C \in \mathcal{P}(\{v \mid |v| < m\})}$ forniscono un insieme di rapresentanti per tutte le classi laterali destre del sottogruppo B_m: vale infatti

$$\epsilon_v(\tau_1 \tau_2) = \epsilon_{\tau_2(v)}(\tau_1) + \epsilon_v(\tau_2) \mod (2);$$

a questo punto vogliamo dimostrare che, comunque preso $x \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$, esistono $b \in B_m$ e $C \subseteq \{v \mid |v| < m\}$ tali che $x = b\tau_C$, o, equivalentemente, $b^{-1} = \tau_C x^{-1}$. Preso un vertice di livello minore di m si ha

$$\epsilon_v(\tau_C x^{-1}) = \epsilon_{x^{-1}(v)}(\tau_C) + \epsilon_v(x^{-1}) \mod (2).$$

Basta ora considerare $C = \{x(v) \mid |v| < m \ \wedge \ \epsilon_v(x^{-1}) = 1\}$ e si ottiene chiaramente $\tau_C x^{-1} \in B_m$.

A questo punto, poiché i possibili C sono proprio $2^{2^m - 1}$, si ottiene la stima voluta. □

Ricordiamo che, per ogni gruppo G, chiamiamo *prodotto intrecciato* di G con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e lo denotiamo con $G \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il prodotto semi-diretto $(G \times G) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dove l'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è quella di permutazione delle componenti.

Proposizione 3.2. $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \simeq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Chiaramente $B_1 \simeq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \times \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$, infatti esso contiene gli automorfismi del sottoalbero $\boldsymbol{T}_{(0)}$ che lasciano fisso $\boldsymbol{T}_{(1)}$ e viceversa, questi tipi di automorfismo commutano tra loro, generano e si intersecano solo nell'identità.

Oltre B_1, anche $\langle a \rangle \subset \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$, e $a \notin B_1$. Chiaramente $\langle B_1, a \rangle = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$, perché se $g \in G \setminus B_1$, allora $ga \in B_1$ e $(ga)a = g$.

A questo punto il teorema di decomposizione in prodotto semidiretto ci dice che

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \simeq B_1 \rtimes_q \langle a \rangle,$$

dove

$$q : \langle a \rangle \to \mathrm{Aut}(B_1)$$
$$q(a)(g) = a^{-1} g a.$$

Se denotiamo un elemento di B_1 come (g_1, g_2), sfruttando l'isomorfismo con $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}_{(0)}) \times \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}_{(1)})$, appare chiaro che

$$a(g_1, g_2)a = (g_2, g_1),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Denotiamo con $\varphi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \to (\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \times \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'isomorfismo costruito, e con $\psi = \varphi^{-1}$ il suo inverso.

3.2 Costruzione di $\mathbb{G}$

Data una famiglia numerabile di automorfismi $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sotto certe ipotesi è possibile definire l'automorfismo

$$\varphi = \ldots \varphi_k \ldots \varphi_2 \varphi_1 \varphi_0.$$

Ipotizziamo infatti che, per ogni m, il numero degli automorfismi che non fissano i vertici di ordine m sia finito. Ciò vuol dire che, comunque preso v, è possibile considerare il limite (che è stazionario)

$$\lim_{N \to \infty} \varphi_N \varphi_{N-1} \ldots \varphi_1 \varphi_0(v).$$

Se a questo punto definiamo

$$\varphi(v) = \lim_{N \to \infty} \varphi_N \varphi_{N-1} \ldots \varphi_1 \varphi_0(v),$$

in tal modo φ risulta un automorfismo.

A questo punto ha senso definire i seguenti automorfismi:

$$b := (\dots a_{(1^7 0)} a_{(1^4 0)} a_{(10)})(\dots a_{(1^6 0)} a_{(1^3 0)} a_{(0)})$$
$$c := (\dots a_{(1^6 0)} a_{(1^3 0)} a_{(0)})(\dots a_{(1^8 0)} a_{(1^5 0)} a_{(1^2 0)})$$
$$d := (\dots a_{(1^8 0)} a_{(1^5 0)} a_{(1^2 0)})(\dots a_{(1^7 0)} a_{(1^4 0)} a_{(10)})$$

dove abbiamo sostituito con 1^k la scrittura $11\dots1$, k volte. è facile verificare che

$$b = \varphi((a, c); \bar{0}); \;\; c = \varphi((a, d); \bar{0}); \;\; d = \varphi((Id, b); \bar{0}). \qquad (\heartsuit)$$

Denotiamo con $\mathbb{G}$ il sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$ generato da $\langle a, b, c, d\rangle$. Studiamo ora qualche proprietà di questi generatori.

Lemma 3.3. $\langle b, c, d\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare i seguenti fatti:

$$b^2 = c^2 = d^2 = Id; \;\; bc = d; \;\; cd = b; \;\; db = c.$$

Per fare ciò procediamo per induzione sul livello del vertice n. Per semplicità scriveremo solo di $b^2 = Id$ e di $bc = d$, tanto le altre dimostrazioni risultano identiche.

Il passo base lo abbiamo, infatti per verifica diretta i vertici di livello 1 si comportano nello stesso modo con b^2 e Id e con bc e d.

Per quanto riguarda il passo induttivo, ipotizziamo di avere le relazioni

$$b^2_{||v|\leq n} = c^2_{||v|\leq n} = d^2_{||v|\leq n} = Id_{||v|\leq n};$$
$$(bc)_{||v|\leq n} = d_{||v|\leq n}; \;\; (cd)_{||v|\leq n} = b_{||v|\leq n}; \;\; (db)_{||v|\leq n} = c_{||v|\leq n}.$$

Ma allora vale:

- Per quel che riguarda b^2, i vertici di livello $n+1$ facenti parte del sottoalbero $\boldsymbol{T}_{(0)}$ vengono lasciati fissi poiché $b^2_{|\boldsymbol{T}_{(0)}} = Id$ per definizione, mentre gli altri vertici di livello $n+1$ sono i vertici di livello n del sottoalbero $\boldsymbol{T}_{(1)}$, a cui, sempre per definizione, viene applicato c^2. Ma per ipotesi induttiva su di essi $c^2 = Id$.

- Per quanto riguarda bc invece, i vertici di livello n del sottoalbero $\boldsymbol{T}_{(0)}$ vengono lasciati fissi da entrambi gli automorfismi, sempre per definizione. Mentre per quel che riguarda i vertici di livello n del sottoalbero $\boldsymbol{T}_{(1)}$, su di essi bc agisce come cd ad un livello precedente, ma per ipotesi induttiva fino al livello n $cd = b$, e visto che sul sottoalbero $\boldsymbol{T}_{(1)}$ d agisce come b, la tesi è dimostrata.

□

Lemma 3.4.
$$|\langle a, d\rangle| = 8.$$

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che $a^2 = d^2 = Id$. Inoltre è facile dimostrare che l'ordine di ad è proprio 4, infatti si può sfruttare l'isomorfismo φ, ottenendo
$$o(ad) = o(((Id, b); \bar{1})).$$
Ma a questo punto basta calcolare le iterate, ottenendo
$$((Id, b); \bar{1})^4 = (((Id, b); \bar{1})^2)^2 = ((b, b); \bar{0})^2 = Id,$$
e poiché $((b, b); \bar{0}) \neq Id$, si ha che l'ordine cercato è proprio 4. Visto che $(ad)d = a$, si ha $\langle ad, d\rangle = \langle a, d\rangle$. Inoltre
$$o(ad) = 4;\ o(d) = 2;\ d(ad)d = da = (ad)^{-1}; \tag{$\natural$}$$
infatti $(da)(ad) = Id$. Visto che le relazioni ($\natural$) sono esattamente quelle del diedrale D_4, si ottiene la tesi.

□

3.3 Il gruppo $\mathbb{G}$ è infinito

Per ottenere questo risultato non procediamo in maniera diretta, ma studiamo una costruzione che ci tornerà utile in futuro.

Denotiamo con $\mathrm{St}_{\mathbb{G}}(n)$ il sottogruppo di $\mathbb{G}$ che fissa tutti i vertici di livello n, ossia $\mathrm{St}_{\mathbb{G}}(n) = B_n \cap \mathbb{G}$. In altre parole
$$\mathrm{St}_{\mathbb{G}}(n) = \bigcap_{|v|=n} \mathrm{St}_{\mathbb{G}}(v).$$
Denotiamo con $\mathbb{H} = \mathrm{St}_{\mathbb{G}}(1)$ e lo chiamiamo *sottogruppo fondamentale* di $\mathbb{G}$. Inoltre, dati due elementi x, y in un gruppo G, indichiamo con x^y il coniugato di x attraverso y, ossia $x^y = y^{-1}xy$.

Lemma 3.5.
$$\mathbb{H} = \langle b, c, d, b^a, c^a, d^a\rangle;\ [\mathbb{G} : \mathbb{H}] = 2.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 3.3 si conclude facilmente che ogni elemento w di $\mathbb{G}$ si può scrivere nella forma
$$w = (a) * a * a * \ldots a * a * (a)$$

dove ogni $*$ è una tra b, c o d e le a all'inizio e alla fine possono esserci o meno. Un elemento si trova in $\mathbb{H}$ se e solo se il numero di a nella sua decomposizione è pari, infatti gli altri generatori agiscono in modo banale sui vertici di livello 1. Dunque esiste una sola classe laterale non banale di $\mathbb{H}$ composta dagli automorfismi che, in questa decomposizione, si scrivono con un numero dispari di a. Questo implica la seconda parte del lemma. Per quanto riguarda la prima parte, è facile verificare che se il numero di a presenti nella scrittura di un elemento è pari, questo si può esprimere come prodotto di elementi della forma $(a * a) = *^a$ e $*$, da cui la tesi.

$\square$

Lemma 3.6. *Sia G un gruppo, sia $H < G$ tale che $[G : H] = n$, sia $K < G$. Allora*

$$[K : K \cap H] \leq n.$$

Dimostrazione. Chiamiamo $\bar{H} = K \cap H$. Consideriamo la seguente mappa:

$$f : \{\bar{H}k \mid k \in K\} \to \{Hg \mid g \in G\}$$
$$f(\bar{H}k) = Hk;$$

vogliamo dimostrare che f è ben definita e iniettiva.

- f è ben definita poiché se $k_1 = hk_2$ con $h \in \bar{H}$, in particolare $k_1 = hk_2$ con $h \in H$, e dunque si ha $Hk_1 = Hk_2$.
- f è iniettiva in quanto

$$Hk_1 = Hk_2 \Rightarrow hk_1 = k_2 \Rightarrow h = k_2 k_1^{-1} \Rightarrow$$
$$h \in K \Rightarrow h \in \bar{H} \Rightarrow \bar{H}k_1 = \bar{H}k_2.$$

$\square$

Lemma 3.7.

$$[\mathbb{G} : \mathrm{St}_{\mathbb{G}}(n)] \leq 2^{2^n - 1}.$$

Dimostrazione. Basta ricordare che $\mathrm{St}_{\mathbb{G}}(n) = B_n \cap \mathbb{G}$, dove B_n è stato definito nell'Osservazione 3.1; a questo punto il lemma discende da quella stessa osservazione e dal Lemma 3.6. $\square$

Sia ora $\psi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \wr \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ l'isomorfismo precedentemente citato.

Lemma 3.8. *$\psi(\mathbb{H})$ è un sottogruppo di $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ tale che la proiezione su ciascuna componente è surgettiva.*

Dimostrazione. Dalle relazioni ($\heartsuit$) si conclude che

$$\psi : \begin{cases} b \to ((a,c),\bar{0});\ b^a \to ((c,a),\bar{0}); \\ c \to ((a,d),\bar{0});\ c^a \to ((d,a),\bar{0}); \\ d \to ((Id,b),\bar{0});\ d^a \to ((b,Id),\bar{0}); \end{cases} .$$

Identifichiamo $(\mathbb{G}\times\mathbb{G}) \rtimes \{\bar{0}\}$ con $\mathbb{G}\times\mathbb{G}$. Si noti ora che l'immagine è generata dei 6 elementi sopra elencati per il Lemma 3.5, e che la proiezione su ciascuna componente è surgettiva perché si ottengono tutti e 4 i generatori di $\mathbb{G}$. $\square$

Proposizione 3.9. *Il gruppo $\mathbb{G}$ è infinito.*

Dimostrazione. $\mathbb{H}$ è un sottogruppo proprio di $\mathbb{G}$ che viene mappato surgettivamente su $\mathbb{G}$ da $p_1 \circ \psi$, e questo implica la tesi. $\square$

3.4 Il gruppo $\mathbb{G}$ ha crescita superpolinomiale

Definiamo due gruppi *commensurabili* se contengono sottogruppi di indice finito isomorfi. In virtù della Proposizione 1.18 questo ci dice che le loro funzioni di crescita appartengono alla stessa classe di equivalenza. I prossimi lemmi mirano a dimostrare che $\mathbb{G}$ è commensurabile a $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$.

Sia $\mathbb{B} = \langle\{\tau b \tau^{-1} \mid \tau \in \mathbb{G}\}\rangle$ la chiusura normale di $\{b\}$. Chiaramente $\mathbb{B} \lhd \mathbb{G}$.

Lemma 3.10.

$$[\mathbb{G} : \mathbb{B}] \leq 8.$$

Dimostrazione. Dalla relazione $bcd = Id$ sappiamo che $\langle a,b,c,d\rangle = \langle a,b,d\rangle = \mathbb{G}$. Ma allora $\mathbb{G}/_{\mathbb{B}} < \langle a,d\rangle$. Per il Lemma 3.4, sappiamo che $|\langle a,d\rangle| = 8$, da cui la tesi. $\square$

Lemma 3.11.

$$\psi(\mathbb{H}) = \tilde{\mathbb{H}} \supset \mathbb{B} \times \mathbb{B}.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 3.5 sappiamo che

$$\tilde{\mathbb{H}} \supseteq \langle \psi(d), \psi(d^a)\rangle = \langle (Id,b),(b,Id)\rangle.$$

Dato $x_1 \in \mathbb{G}$, scegliamo $x \in \mathbb{H}$ tale che $\psi(x) = (x_0, x_1)$; esiste sempre un tale x per il Lemma 3.8. Sviluppiamo $\psi(d^x)$:

$$\psi(d^x) = \psi(x^{-1})\psi(d)\psi(x) = (x_0^{-1}, x_1^{-1})(Id,b)(x_0,x_1) = (Id, b^{x_1}).$$

Ma allora $\tilde{\mathbb{H}} \supset \{Id\} \times \mathbb{B}$. Se ripetiamo il ragionamento scegliendo x_0 invece di x_1 e calcolando $\psi(d^{ax})$ otteniamo $\tilde{\mathbb{H}} \supset \mathbb{B} \times \{Id\}$, da cui la tesi. $\square$

Dai risultati precedenti è facile dedurre che

$$[\mathbb{G} \times \mathbb{G} : \tilde{\mathbb{H}}] \leq [\mathbb{G} \times \mathbb{G} : \mathbb{B} \times \mathbb{B}] = [\mathbb{G} : \mathbb{B}]^2 \leq 8^2 = 64.$$

Ma allora, poiché ψ è un'isomorfismo, si ha che $\mathbb{H} \simeq \tilde{\mathbb{H}}$, e visto che il primo ha indice finito in $\mathbb{G}$ e il secondo in $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, questo dimostra che $\mathbb{G}$ è commensurabile a $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$.

Lemma 3.12. *Sia G un gruppo infinito tale che G è commensurabile a G^m per qualche $m \geq 2$. Allora esiste $\alpha > 0$ tale che $\gamma_G(n) \succeq \exp(n^\alpha)$.*

Dimostrazione. Siano $H < G$ e $\tilde{H} < G^m$ i due sottogruppi di indice finito isomorfi tra loro. Grazie alla Proposizione 1.18 e all'Osservazione 1.13, otteniamo

$$\gamma_G \sim \gamma_H \sim \gamma_{\tilde{H}} \sim \gamma_{G^m} \sim \gamma_G^m;$$

ma allora, grazie al Lemma 1.19, della stima inferiore, otteniamo il risultato voluto. □

Corollario 3.13. *Il gruppo $\mathbb{G}$ ha crescita superpolinomiale.*

3.5 Lunghezza degli elementi

Studiamo in maniera più dettagliata la forma che può assumere la decomposizione minimale di un elemento.

A partire dal Lemma 3.3 si deduce facilmente che ogni decomposizione minimale di un elemento ha una delle seguenti forme:

$$g = a * a * a \dots a * a * a \tag{1}$$

$$g = a * a * a \dots * a * a* \tag{2}$$

$$g = *a * a * \dots a * a * a \tag{3}$$

$$g = *a * a * \dots * a * a* \tag{4}$$

Lemma 3.14. *Sia $g \in \mathbb{G}$. Le sue decomposizioni minimali sono tutte del tipo (1), oppure sono tutte del tipo (4), oppure sono tutte dei tipi (2) e (3).*

Dimostrazione. Chiaramente le decomposizioni minimali hanno (per definizione) tutte la stessa lunghezza. Ricordiamo che la parità delle a nella decomposizione di un elemento è univocamente determinata dalla sua appartenenza o meno a $\mathbb{H}$. Dal momento che, ad eguale lunghezza, le scritture del tipo (1) e (4) hanno questa parità diversa, un elemento non può avere decomposizioni minimali del tipo (1) e del tipo (4). A questo punto basta notare che le stringhe del tipo (2) e (3) hanno lunghezza pari, mentre quelle del tipo (1) e (4) hanno lunghezza dispari. Questo implica la tesi. □

Riprendiamo di nuovo l'isomorfismo $\psi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \wr \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$; vale il seguente risultato:

Lemma 3.15. *Fissato il gruppo di generatori $S = \{a, b, c, d\}$ e dato $g \in \mathbb{G}$, sia $l(g) = l_S(g)$ la sua lunghezza. Sia $\psi(g) = ((g_0, g_1); \bar{i})$. Allora:*

- *Se g è del tipo (1), allora $l(g_0), l(g_1) \leq \frac{1}{2}(l(g) - 1)$.*
- *Se g è del tipo (2-3), allora $l(g_0), l(g_1) \leq \frac{1}{2}l(g)$.*
- *Se g è del tipo (4), allora $l(g_0), l(g_1) \leq \frac{1}{2}(l(g) + 1)$.*

Dimostrazione. Per quanto possa sembrare macchinoso, è utile introdurre una funzione π che applicata ad un elemento di una decomposizione w restituisce il numero di a presenti in quella decomposizione che lo precedono. L'idea è ora quella di applicare le riscritture definite nella dimostrazione del Lemma 3.8, e per fare questo ci rendiamo conto che, considerando un elemento $*$ come $*^a$ se $\pi(*)$ è dispari, e come $*$ se $\pi(*)$ è pari, aggiungendo al più una a alla fine della parola otteniamo una decomposizione di w come $*^a$ e $*$. I problemi che sorgono dall'aggiunta di a alla fine della parola non si presentano in quanto $\psi(g)$ e $\psi(ga)$ hanno la stessa proiezione su $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}) \times \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$, cambia solo la componente in $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

Consideriamo ora le seguenti regole di riscrittura:

$$\Phi_0 : \begin{cases} a \to Id \\ b \to a,\ c \to a,\ d \to Id \text{ se } \pi(*) \text{ è dispari} \\ b \to c,\ c \to d,\ d \to b \text{ se } \pi(*) \text{ è pari} \end{cases}$$

e

$$\Phi_1 : \begin{cases} a \to Id \\ b \to c,\ c \to d,\ d \to b \text{ se } \pi(*) \text{ è dispari} \\ b \to a,\ c \to a,\ d \to Id \text{ se } \pi(*) \text{ è pari} \end{cases}.$$

Sicuramente uno tra i due elementi $((\Phi_0(g), \Phi_1(g)), \bar{i})$ e $((\Phi_1(g), \Phi_0(g)), \bar{i})$ è proprio $\psi(g)$, e visto che la lunghezza delle parole ottenute con le regole di riscrittura Φ_0 e Φ_1 rientrano in quelle volute, si ottiene la tesi. □

Corollario 3.16. *Nelle notazioni del lemma precedente, vale*

$$l(g_0) + l(g_1) \leq l(g) + 1.$$

3.6 Il lemma della cancellazione

Questo lemma molto tecnico costituirà un importante passo verso la dimostrazione della crescita subesponenziale del gruppo $\mathbb{G}$.

Sia $\mathbb{H}_3 := \mathrm{St}_{\mathbb{G}}(3)$. Dal momento che $g \in \mathbb{H}_3$ fissa tutti i vertici di livello 3, necessariamente deve agire come l'identità su tutti i vertici di livello ≤ 3, e dunque si ha che $p_2(\psi(g)) = \bar{0}$. Se w è una decomposizione minimale di h, possiamo applicare Φ_0 e Φ_1 per ottenere w_0 e w_1, che sono decomposizioni (non necessariamente minimali) di $(g_0, g_1) = p_1(\psi(g))$. Iterando fino al terzo livello troviamo $g_{00}, \ldots, g_{11}$ e $g_{000}, \ldots, g_{111}$. Chiaramente si ha

$$l(g_i) \leq |w_i|;\ l(g_{ij}) \leq |w_{ij}|;\ l(g_{ijk}) \leq |w_{ijk}|.$$

Ora, per il Corollario 3.16, valgono anche le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} l(g_0) + l(g_1) &\leq l(g) + 1; \\ l(g_{00}) + \ldots + l(g_{11}) &\leq l(g_0) + l(g_1) + 2; \\ l(g_{000}) + \ldots + l(g_{111}) &\leq l(g_{00}) + \ldots l(g_{11}) + 4; \end{aligned} \qquad (\spadesuit)$$

Per semplificare la notazione, indichiamo in questo modo la concatenazione delle parole dello stesso livello:

$$w' = w_0 \cdot w_1;\ w'' = w_{00} \cdot \ldots \cdot w_{11};\ w''' = w_{000} \cdot \ldots \cdot w_{111}.$$

Si noti che, chiamato $|w|_d$ il numero di d nella parola w, $|\Phi_0(w) \cdot \Phi_1(w)| \leq |w| + 1 - |w|_d$, infatti ogni d viene trasformata in identità o da Φ_0 o da Φ_1. Inoltre al secondo passo ogni c viene mandata (come prima o da Φ_0 o da Φ_1) in una d che sarà mandata in Id, e al terzo passo ogni $b \to c \to d \to Id$. Dunque si hanno le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |w'| &\leq |w| + 1 - |w|_d \\ |w''| &\leq |w| + 3 - |w|_c \\ |w'''| &\leq |w| + 7 - |w|_b \end{aligned}$$

Ma dal momento che $|w|_b + |w|_c + |w|_d \geq \frac{|w|-1}{2}$, almeno in un caso vale $|w|_* \geq \frac{|w|-1}{6} > \frac{|w|}{6} - 1$. Utilizzando tutte e tre le espressioni in $(\spadesuit)$, si ottiene

$$l(g_{000}) + \ldots + l(g_{111}) \leq \min(\{|w'| + 2 + 4;\ |w''| + 4, |w'''|\}) \leq$$

$$|w| + 7 - \max_{* \in \{b,c,d\}}(|w|_*) \leq |w| + 7 - (\frac{|w|}{6} - 1) \leq \frac{5}{6} l(h) + 8.$$

3.7 Il gruppo $\mathbb{G}$ ha crescita subesponenziale

Siamo vicini al raggiungimento del nostro scopo. Premettiamo un piccolo lemma che ci servirà nella successiva dimostrazione:

Lemma 3.17. *Siano $G = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$ un gruppo finitamente generato, $H < G$ un suo sottogruppo di indice $[G : H] = I < \infty$, X l'insieme dei suoi laterali destri. Sia r la funzione*

$$r : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(X)$$

$$r(n) = \{Hg \mid l(g) \leq n\}.$$

Allora vale

$$r(n+1) = r(n) \Rightarrow r(n) = X.$$

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che la funzione r soddisfa $r(n+1) \supseteq r(n)$ e che, necessariamente, esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $r(M) = X$, infatti basta scegliere un insieme di rappresentanti delle classi laterali e, poiché questo insieme è finito, si ha un massimo M della funzione l_S ristretta ad esso; tale massimo soddisfa $r(M) = X$.

Sia ora n tale che $r(n+1) = r(n)$. Allora dal momento che

$$r(n+1) = r(n) \cup \{H(gs_i) \mid l_s(g) \leq n,\ s_i \in S\} =$$

$$r(n) \cup \{(Hg)s_i \mid l_s(g) \leq n,\ s_i \in S\} = r(n) \cup r(n)S,$$

si ha

$$r(n)S \subseteq r(n),$$

da cui per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$r(n)S^m \subseteq r(n)$$

e dunque

$$r(n+m) \subseteq r(n).$$

Ma per l'osservazione precedente la catena non può divenire stazionaria ad un livello diverso da X, da cui $r(n) = X$.

□

Siamo ora pronti per dimostrare l'ultima proposizione necessaria al raggiungimento del nostro scopo.

Proposizione 3.18. *Il gruppo $\mathbb{G}$ ha crescita subesponenziale. In particolare, esiste $\nu < 1$ tale che $\gamma_{\mathbb{G}}(n) \preceq \exp(n^\nu)$.*

Dimostrazione. Ogni elemento $g \in \mathbb{G}$ può essere scritto nella forma $g = hu$ dove $h \in \mathbb{H}_3$ e u è un rappresentante della classe laterale $\mathbb{H}g$. Per il Lemma 3.7 sappiamo che $[\mathbb{G} : \mathbb{H}_3] \leq 128$, dunque possiamo scegliere 128 di tali elementi u.

In virtù del Lemma 3.17, tali u possono essere scelti di lunghezza minore o uguale a 127.

Dunque la decomposizione $h = gu^{-1}$ ha la proprietà che $l(h) \leq l(g) + 127$.

Scriviamo g come $hu = g_{000} \dots g_{111}u$. Il lemma della cancellazione ci dice:

$$\sum_{ijk} l(g_{ijk}) \leq \frac{5}{6}l(h) + 8 \leq \frac{5}{6}(l(g) + 127) + 8 < \frac{5}{6}l(g) + 114.$$

Dunque il massimo numero di elementi che possiamo costruire con una parola di lunghezza n è

$$128 \sum_{(n_1,\dots,n_8) \in \mathcal{Q}(\frac{5}{6}n+114)} \gamma(n_1) \dots \gamma(n_8).$$

Sia ora $m = n + 127$, in modo che $\frac{5}{6}n + 114 \leq \frac{5}{6}m$. Dunque

$$\gamma(m) = \gamma(n + 137) \leq \gamma(n) \cdot |S|^{137} = 4^{137}\gamma(n).$$

In conclusione si ha:

$$\gamma(m) \leq 4^{137}\gamma(n) \leq 4^{137} \cdot 128 \cdot \gamma^{\star 8}\left(\frac{5}{6}n + 114\right) \leq 2^{281}\gamma^{\star 8}\left(\frac{5}{6}m\right).$$

Applicando ora il lemma della stima dall'alto (asintoticamente) si ottiene il risultato cercato. $\square$

Capitolo 4

Ulteriori sviluppi

La bibliografia sulla ricerca nel campo della crescita di gruppi è molto ricca e piuttosto attiva. In questo capitolo diamo uno sguardo ad alcune parti di questa ricerca; per una presentazione più completa, si guardi [Gri14a].

4.1 Un risultato di Gromov

La risposta data da Grigorchuk sull'esistenza di gruppi di crescita intermedia non esaurisce la curiosità della ricerca matematica. Chi ha esperienza in questo settore sa che le domande che ci si può porre sono le più svariate, ma è importante cogliere gli aspetti caratterizzanti delle strutture che vengono studiate.

In quest'ottica il seguente risultato di Gromov, dimostrato in [Gro81], ci fa capire che le funzioni di crescita dei gruppi rientrano in schemi piuttosto rigidi, nonostante l'esempio appena esposto potesse farci credere il contrario. Citiamo dapprima un risultato di Wolf:

Teorema 4.1. *(Wolf) Un gruppo nilpotente finitamente generato ha crescita polinomiale.*

E a questo punto il risultato di Gromov:

Teorema 4.2. *(Gromov) Per ogni coppia di interi positivi d e k, esistono tre interi positivi R, N e q con la seguente proprietà: se un gruppo G con un fissato insieme di generatori soddisfa la disuguaglianza $\gamma(n) \leq kn^d$ per $n = 1, 2, ..., R$, allora G contiene un sottogruppo nilpotente H di indice al più q e il cui grado di nilpotenza è al più N.*

Prima di procedere nella direzione che stiamo seguendo ci sembra giusto sottolineare l'importanza del risultato di Gromov: questo teorema, infatti, collega la funzione di crescita di un gruppo con la sua struttura, ed è uno dei risultati più noti legato alla crescita di gruppi.

Tornando a noi, questi teoremi evidenziano l'esistenza di una funzione $v(n)$ più veloce di ogni polinomio tale che

$$\gamma_G(n) \prec v(n) \Rightarrow \exists m \ \gamma_G(n) \prec n^m.$$

Basta infatti considerare due successioni $\{k_i, d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ crescenti e illimitate, e la corrispondente sequenza $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ data dal Teorema 4.2; a questo punto la funzione che vale $k_i n^{d_i}$ sugli interi nell'intervallo $[R_{i-1}+1, R_i]$, grazie al già citato risultato di Wolf, ci fornisce un esempio di *salto* tra le possibili velocità delle funzioni di crescita di un gruppo.

Un risultato più raffinato ci dà un esempio esplicito della velocità di una funzione $v(n)$ definita come sopra. Grazie ad un'altra stima di Gromov è infatti possibile dimostrare che la funzione $n^{c(\log(\log(n)))^c}$, dove c è una costante, ha la stessa proprietà di $v(n)$.

4.2 The Gap Conjecture

La seguente sezione vuole introdurre un problema aperto nell'ambito della crescita dei gruppi. Come abbiamo visto il ventaglio delle possibili funzioni di crescita di un gruppo presenta dei *salti*, e di seguito vengono citati alcuni risultati che hanno aiutato a comprenderli e alcuni dubbi ancora non chiariti. Per approfondire l'argomento si veda [Gri14b].

Nel corso della nostra trattazione abbiamo presentato un gruppo con crescita intermedia; in particolare abbiamo dimostrato l'esistenza di due costanti $0 < \alpha < \beta < 1$ tali che

$$\exp(n^\alpha) \prec \gamma_G(n) \prec \exp(n^\beta).$$

Esplicitando i conti e fornendo delle stime più accurate è possibile dimostrare che queste stime valgono se $\alpha = 0.5157$ e $\beta = 0.7675$. Tutti i gruppi con crescita intermedia noti ad oggi soddisfano la stima $\exp(\sqrt{n}) \prec \gamma_G(n)$, ed è per questo che è stata formulata la seguente

Congettura 4.3. *(The Gap Conjecture) Se la funzione di crescita di un gruppo finitamente generato G soddisfa $\gamma_G(n) \prec e^{\sqrt{n}}$, allora la crescita di G è polinomiale.*

Nella fattispecie è ancora un problema aperto trovare un gruppo la cui funzione di crescita sia equivalente a $\exp(\sqrt{n})$. Diversi risultati sostengono questa congettura, che è stata infatti dimostrata nel caso, ad esempio, dei gruppi residualmente nilpotenti e finitamente generati.

Sebbene si stia lavorando a questo, è ancora aperta anche una congettura più debole, ossia

Congettura 4.4. *(Weak Gap Conjecture) Esiste un* $0 < \beta < 1$ *tale che, se la funzione di crescita di un gruppo finitamente generato* G *soddisfa* $\gamma_G(n) \prec \exp n^\beta$*, allora la crescita di* G *è polinomiale.*

Anche quest'ultima congettura è stata risolta in alcuni casi: Wilson, in [Wil11], ha dimostrato che per i gruppi residualmente risolubili vale la *Weak Gap Conjecture* con $\beta = \frac{1}{6}$.

Chiudiamo il capitolo con un risultato che potrebbe tornare utile a chiunque possa avere buone idee riguardo a quest'argomento:

Teorema 4.5. *Se vale la Gap Conjecture per i gruppi residualmente finiti e per i gruppi semplici, allora vale per tutti i gruppi.*

Bibliografia

[Gri84] R. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 48(5):939–985, 1984.

[Gri08] R. Grigorchuk. Groups of intermediate growth: an introduction. *L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. 2e Série*, 54(3-4):251–272, 2008.

[Gri14a] R. Grigorchuk. Milnor's problem on the growth of groups and its consequences. *Princeton Mathematical Series.*, 51:705–773, 2014.

[Gri14b] R. Grigorchuk. On the gap conjecture concerning group growth. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 4(1):113–128, 2014.

[Gro81] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, 53:53–73, 1981.

[Mil68] J. Milnor. A note on curvature and fundamental group. *Journal of Differential Geometry*, 2:1–7, 1968.

[Wil11] J. Wilson. The gap in the growth of residually soluble groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 43(3):576–582, 2011.

Ringraziamenti

Di tanto in tanto, durante la stesura della tesi, ho avuto modo di pensare a diverse persone che mi sembrava giusto ringraziare; metà di queste le ho già dimenticate. Se poi si aggiungessero quelle il cui ricordo non è neppure stato rinnovato recentemente, la paura di non rendere merito a coloro che mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo si fa, più che una paura, una certezza. Spero dunque che chiunque creda di aver avuto un ruolo importante in questo percorso possa riconoscersi in una delle descrizioni seguenti, suppur questa speranza mi appaia vana.

Ringrazio di cuore la mia famiglia, per esserci sempre stata e per avermi sempre supportato e sopportato, anche nelle mie scelte più avventate. Per quanto si possa apparire autonomi, la consapevolezza di avere qualcuno che ti guarda le spalle è una rassicurazione senza la quale sarebbe difficile riuscire ad andare avanti.

Ringrazio tutti gli educatori che hanno avuto la pazienza di insegnarmi a ragionare e non la volontà di farmi acquisire delle nozioni; in particolare nel corso di laurea che ho scelto i metodi appresi sono stati essenziali.

Ringrazio Casa Paolo e i suoi membri, che mi hanno fornito, in dosi molto variabili, un confronto costruttivo nello studio e i modi più svariati per divertirsi. In questi anni passati insieme abbiamo vissuto esperienze indimenticabili e abbiamo costruito rapporti che vanno oltre la semplice amicizia.

Ringrazio la mia sguanciottina preferita, per darmi la forza di alzarmi dal letto tutti i giorni, per gli sguardi e le emozioni che mi ha regalato.

Ringrazio e auguro ogni bene a tutti gli amici che ho incontrato nella mia vita; senza di essi non sarei ciò che sono ora.

Ringrazio l'AulaStud e tutti coloro che la frequentano, per le nottate di quadriglia, per i polli, per ricordarmi che nella vita tutti vanno e vengono, per fornire un posto dove chiunque può sentirsi accettato.

Ringrazio, infine, la Matematica, per le ore passate insieme a fare conti, per quando mi sveglia nel mezzo della notte perché non mi torna una dimostrazione, per le riscritture che permettono di ottenere dei risultati, per le stime al quart'ordine, per i lemmi spastici; ma, soprattutto, la ringrazio per tutto il resto.