Un compatto non misurabile secondo Peano-Jordan: un esempio che funziona

Nel corso di questo articolo dimostreremo l'esistenza di un compatto non misurabile secondo la misura di Peano-Jordan.

Consideriamo $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bigettiva. Sappiamo che tale ϕ esiste poiché $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Sia dunque $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ..., q_n, ...\}$. Consideriamo

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(q_i, \frac{1}{2^{i+2}})$$

dove abbiamo indicato con $B(c, r) = \{x \in \mathbb{R} \ t.c. \ |x - c| < r\}$. Ovviamente A è aperto in quanto unione di aperti.

Sia ora $C = A^c$, ossia A complementare. C è chiuso. Considero ora $K = C \cap [0, 1]$. K è chiuso poiché intersezione di chiusi ed è limitato. Dunque K è un compatto.

La misura interna di K è 0, infatti $\forall \ [x, y]$ intervallo $\exists \ q \in \mathbb{Q} \ t.c. \ q \in [x, y]$. E, per costruzione, $\mathbb{Q} \subset A = C^{cc}$.

Dimostriamo ora un fatto leggermente più complesso, ossia che la misura esterna di K non può essere nulla.

Siano $\epsilon = \frac{1}{3}$ e $[x_i, y_i]$ con $i \in \{1, ..., n\}$ tali che

- $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} [x_j, y_j] = U$
- $\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) < \epsilon$

Per definizione $(U^c \cap [0, 1]) \subset (([0, 1]^c \cup C^c) \cap [0, 1]) = C^c \cap [0, 1] = A \cap [0, 1] \subset A$. Dal momento che U è unione finita di intervalli, anche $U^c \cap [0, 1]$ è unione finita di intervalli e la sua misura uguale a $(1 - 0) - \epsilon = 1 - \epsilon$. Dimostriamo ora che la misura interna di A è minore di $1 - \frac{1}{3}$, e dunque non è possibile che $(U^c \cap [0, 1]) \subset A$.

Siano $[a_i, b_i], i \in \{1, ..., m\}$ tali che

- $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset \leftrightarrow i \neq j$
- $\sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) = \frac{2}{3}$
- $H = \bigcup_{j=1}^{m} [a_j, b_j] \subset A$

Dimostriamo prima un risultato preliminare: A non può contenere intervalli di lunghezza maggiore di $\frac{1}{4}$.

Poiché $[a,b]$ è compatto ed è contenuto in A, esiste un sottoricoprimento finito di $[a,b]$, ossia $\exists F \subset N \ t.c. \ |F| \in \mathbb{N} \ \wedge \ [a,b] \subset \bigcup_{f\in F} B(q_f, \frac{1}{2^{f+2}})$.

Sia $d = max(F)$. È facile dimostrare per induzione su d che se

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{d} B(q_i, \frac{1}{2^{i+2}}) \Rightarrow b-a \leq \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{2^{i+2}} < \frac{1}{4}$$

.

Dal discorso appena fatto è facile dedurre il seguente risultato: sia G_1 la componente connessa di misura massima (tale misura è ben definita dal momento che i connessi in $\mathbb{R}$ sono intervalli e tali componenti non possono essere illimitate per il risultato appena dimostrato), allora tutte le altre componenti connesse hanno misura minore di $\frac{1}{8}$, infatti la componente connessa di $B(q_1, \frac{1}{2^3})$ ha misura almeno $\frac{1}{8}$, e una qualsiasi altra componente connessa (poiché deve essere disgiunta) è contenuta in $\bigcup_{i=2}^{n} B(q_i, \frac{1}{2^{i+2}})$, e per il discorso appena fatto deve avere misura minore di $\frac{1}{8}$. Da questo discorso, procedendo per induzione, è facile dedurre che, date $G_1, ..., G_n, ...$ componenti connesse ordinate per misura, si ha che la i-esima componente connessa ha misura al più $\frac{1}{2^{i+1}}$.

Possiamo ora concludere la dimostrazione. Siano $G_r, \ r \in R$ le componenti connesse di A la cui unione contiene H. Per quanto dimostrato la misura interna di $\bigcup_{r\in R} G_r$ è minore di $\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}$. Ma dunque avrei che la misura interna di $U^c \cap [0,1]$ è maggiore o uguale a $\frac{2}{3}$ e tale insieme è al contempo contenuto in A la cui misura interna è minore uguale a $\frac{1}{2}$. Ciò è assurdo.

Da questo concludiamo che K è un compatto non misurabile per la misura di Peano-Jordan.

Battista Ludovico