

XVIII congresso U.M.I.

Bari, 24-29 settembre 2007

Giovanni Alberti
UNIVERSITÀ DI PISA

Sulla struttura degli insiemi di misura nulla.
Applicazioni e problemi aperti

lavoro in collaborazione con
DAVID PREISS (Warwick)
MARIANNA CSÖRNYEI (UCL)

INDICE

- Alcune motivazioni
- Un teorema di ricoprimento per insiemi di misura nulla nel piano
- Applicazioni → (non) derivabilità delle funzioni di Lipschitz
 - Campo di vettori tangente ad un insieme di misura nulla
 - problema di LeczKovich
- Dimostrazione del teorema di ricoprimento
- Problemi aperti (estensioni a dimensione > 2)

0.2

1. ALCUNE MOTIVAZIONI

- Derivabilità delle funzioni di Lipschitz
 - ↳ Problema degli isomorfismi di Lipschitz tra spazi di Banach
- Proprietà di rango uno per le funzioni BV e struttura delle correnti normali
- Problema di LeczKovich
-

1.1

2. UN RISULTATO DI RICOPRIMENTO PER INSIEMI NULLI

E nullo $\Leftrightarrow E$ ha misura (di Lebesgue) nulla

Notazione

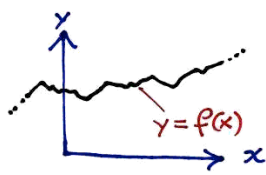


grafico
orizzontale

i.e. grafico di

$y=f(x)$ con

$\text{Lip}(f) \leq 1$

↑

costante di Lipschitz:

$\inf \{L: |f(x_1)-f(x_2)| \leq L|x_1-x_2| \forall x_1, x_2\}$

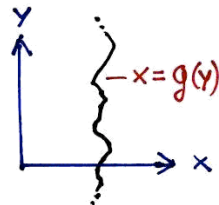
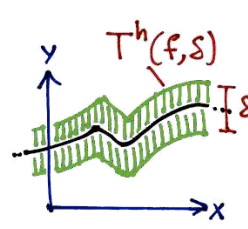


grafico
verticale

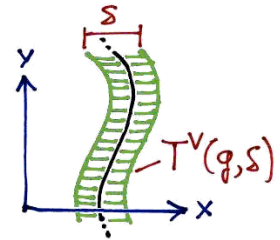


striscia
orizzontale
di spessore s

$T^h(f, s) := \{ |y-f(x)| \leq \frac{s}{2} \}$

con

$\text{Lip}(f) \leq 1$



striscia
verticale

2.1

TEOREMA

Sia E un compatto di misura nulla in \mathbb{R}^2 .

Allora E si scrive come $E = E^h \cup E^v$ dove

(i) $\forall \varepsilon > 0$, E^h si ricopre con strisce orizzz.

$T_i^h = T^h(f_i, s_i)$ t.c. $\sum s_i \leq \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, E^v si ricopre con strisce vertic.

$T_j^v = T^v(g_j, \eta_j)$ t.c. $\sum \eta_j \leq \varepsilon$

Osservazione. Questo enunciato può essere visto come un raffinamento del teor. di Fubini.

2.2

3. DERIVABILITÀ DELLE FUNZIONI DI LIPSCHITZ

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di Lipschitz.
Per il Teorema di Rademacher f è derivabile
(= differenziabile) in quasi ogni punto di \mathbb{R}^n .

Questo risultato è ottimale? nel senso della misura di Lebesgue \mathcal{L}^n

Domanda (versione forte)

Dato E insieme nullo in \mathbb{R}^n esiste una funzione di Lipschitz $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ che sia non derivabile in ogni punto di E ?

Domanda (versione debole)

Data μ misura positiva singolare su \mathbb{R}^n esiste una funzione di Lip. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ non derivabile in μ q.o. punto?

3.1

Osservazioni

- (i) Una risposta positiva alla D.F. implica una risposta pos. alla D.D.
- (ii) Dato n la risposta a D.F. dipende da m .
- (iii) Dato n la risposta a D.D. non dipende da m .
- (iv) Cosa succede prendendo la funzione distanza:

$$f(x) := \text{dist}(x, E) \quad ? \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{supponiamo} \\ E \text{ compatto} \end{array}$$

Si osserva che f è non derivabile in $x \in E$ se e solo se x è un punto di non porosità di E .

$$(\exists x_n \rightarrow x, r_n \rightarrow 0 \text{ t.c. } B(x_n, r_n) \cap E = \emptyset \text{ e } |x_n - x| = o(r_n))$$

Ma esistono insiemi compatti E di misura nulla con moltissimi punti di non porosità.

Infatti esistono misure singolari μ tali che $\mu(E) = 0$ per ogni insieme E poroso.

3.2

Cosa si sa (per il momento)

$n=1$: Risposta positiva a D.F. (e quindi a D.D.)
Costruzione classica.

Cfr. Z. Zahorski, Bull. Soc. Math. France 74 (1946).

$n=2, m=1$: La risposta a D.F. può essere negativa.
D. Preiss, J. Funct. Anal. 91 (1990).

$n=2, m$ qual. : Risposta positiva a D.F. (e a D.D.)
in G.A. - M. Csörnyei - D. Preiss

$n > 2$: Non si sa quasi nulla

3.3

Costruzione per $n=1$

Sia E compatto.

Siccome $\mathcal{L}'(E) = 0$, esistono aperti $A_n \searrow E$ t.c.

$$\mathcal{L}'(A_n) \leq 2^{-n} \mathcal{L}'(I) \quad \forall I \text{ comp. conn. di } A_{n-1}$$

Per ogni n prendiamo g_n t.c. $g'_n = \mathbb{1}_{A_n}$
e poniamo infine

$$f'_m(x) := \sum_{n=0}^m (-1)^n g'_n(x); \quad f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x).$$

Allora f'_m ha derivata 1 su A_m per m pari
e derivata 0 per m dispari.

Infine f ha "pendenza" 1 sulla scala di A_m
per m pari, e "pendenza" 0 per m dispari.

Quindi f non è diff. per ogni $x \in E = \bigcap A_m$.

3.4

Cosa si può fare in dimensione 2 ?

- Ricoprire E con dischi non funziona....
- Invece si ricopre E con strisce T_i^h, T_j^v
- Per ogni striscia orizzontale T_i^h si considera la funzione g_i t.c. $\frac{\partial g_i}{\partial y} = \mathbb{1}_{T_i^h}$
- Si usano le funzioni g_i per costruire f

3.5

4. CAMPO TANGENTE AD UN INSIEME NULLO

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$.

Una mappa $\tau : E \rightarrow \{\text{rette in } \mathbb{R}^2\} = G(2,1)$ si dice tangente ad E (in senso debole) se per ogni curva C di classe C^1 in \mathbb{R}^2 si ha

$$\text{Tan}(C, x) = \tau(x) \text{ per q.o. } x \in C \cap E$$

↑
rispetto alla misura
di lunghezza su C
(la m. di Hausdorff \mathcal{H}^1)

4.1

Osservazioni

- (i) Se E è una curva C^1 allora τ esiste e per la precisione $\tau(x) = \text{Tan}(E, x)$
- (ii) Se E è puramente non rettificabile (cioè $\text{Lungh}(E \cap C) = 0 \quad \forall C$ curva C^1 in \mathbb{R}^2) allora ogni τ è tangente a E .
- (iii) Se $\tau \xleftarrow{\tau_E}$ esiste allora è univocamente determinato a meno di sottoinsi. puramente non rettificabili di E
- (iv) Se E ha misura positiva non esiste alcun τ tangente

Teorema

Se E ha misura nulla allora ammette un campo tangente

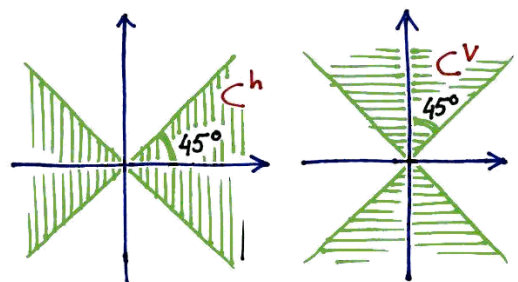
4.2

Definizione ausiliaria. Dato $E \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{G}: E \rightarrow \{\text{coni in } \mathbb{R}^2\}$ si dice tangente ad E se per ogni curva C di classe C^1 si ha $\text{Tan}(C, x) \subset \mathcal{G}(x)$ per q.o. $x \in E \cap C$.

Dimostrazione del Teorema

Passo 1

Si decompone E come $E^h \cup E^v$
Allora $\mathcal{G}^h(x) := C^h$ è tangente a E^h . Mentre $\mathcal{G}^v(x) := C^v$ è tang. a E^v



Passo 2

Il campo $\mathcal{G}(x) := \begin{cases} C^h & \text{se } x \in E^h \\ C^v & \text{se } x \in E^v \setminus E^h \end{cases}$ è tangente a E .

4.3

Passo 3

Per ogni angolo θ ripetiamo la costruzione precedente avendo ruotato gli assi di θ .
Otteniamo un altro campo tangente $\mathcal{E}_\theta(x)$.

Passo 4

Poniamo infine

$$\tau(x) := \bigcap_{\theta \in \mathbb{Q}} \mathcal{E}_\theta(x).$$

Allora τ è tangente a E e $\tau(x)$ è sempre (contenuto in) una retta.

4.4

5. IL PROBLEMA DI LACZKOVICH

Domanda

Sia F un insieme (compatto) di misura positiva in \mathbb{R}^n .
È possibile trovare una mappa di Lipschitz
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $f(E)$ ha parte interna non vuota?

Risposte (per il momento)

$n=1$: Sì! basta prendere f t.c. $f' = 1_E$.

$n=2$: Sì! ma non è semplice:

D. Preiss, lavoro non pubblicato

J. Matoušek, Algorithms Combin. 14 (1999)

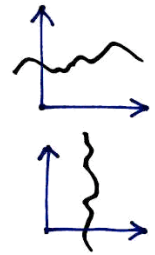
$n>2$: Boh!?

5.1

6. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI RICOPRIMENTO

Proposizione (lemma di Dilworth)

Sia E un insieme finito in \mathbb{R}^2 , $n := \#E$.
Allora si può ricoprire E con
 \sqrt{n} grafici orizzontali e \sqrt{n} verticali.



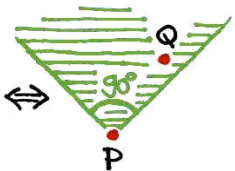
Osservazione

Questa è una versione geometrica
del teorema di Erdős-Szekeres
sulle sottosuccessioni monotone.

6.1

Dimostrazione

Passo 1. Su E si considera l'ordine parziale $P \leq Q \Leftrightarrow$

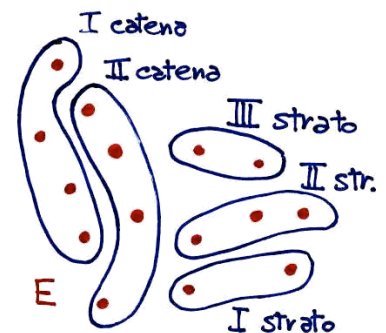


Passo 2. Si rimuovono da E le catene con
almeno \sqrt{n} elementi (finché si può)

Passo 3. Dopo si rimuove da quel che resta il
primo strato (l'insieme dei minimi), poi il
secondo, ecc.

Passo 4. Ogni catena è contenuta in un
grafico verticale. E ce ne sono
al più \sqrt{n} .

Passo 5. Ogni strato è contenuto in
un grafico orizzontale. E ce
ne sono al più \sqrt{n} .



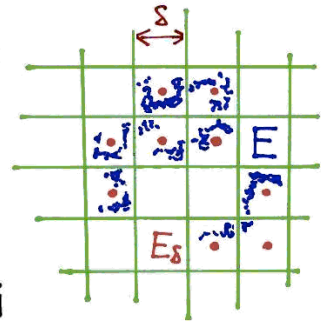
6.2

Dimostrazione del teorema di ricoprimento

Supponiamo E compatto.

Passo 1. Dato $\delta > 0$, sia E_δ la discretizzazione di E tramite una griglia di passo δ .

Allora $\mathcal{L}^2(E) = 0 \iff \#E_\delta = o(1/\delta^2)$.



Passo 2. Ricopriamo E_δ con $\sqrt{\#E_\delta} = o(1/\delta)$ grafici orizzontali f_i e $o(1/\delta)$ verticali g_j usando il lemma di Billworth.

Passo 3. Copriamo E con le strisce $T^h(f_i, 2\delta)$ e $T^v(g_j, 2\delta)$. In entrambe i casi la somma degli spessori è

$$2\delta \cdot o(1/\delta) = o(1)$$

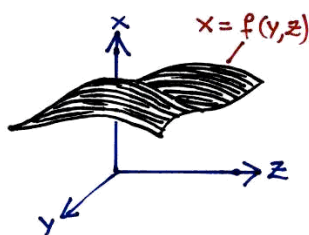
Prendiamo δ t.c. $o(1) \leq \epsilon$.

Passo 4.

6.3

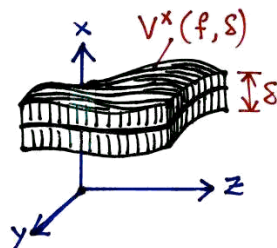
7. ESTENSIONI A DIMENSIONE SUPERIORE (cioè $n=3$)

Notazione



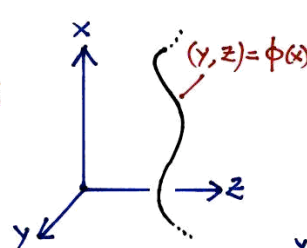
Superficie di tipo x e cost. di Lip. L

grafico $x = f(y, z)$
con $\text{Lip}(f) \leq L$



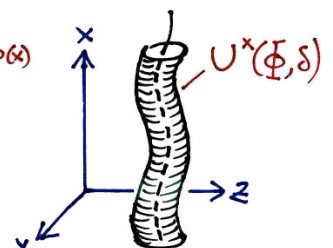
Slab (lastra?) di tipo x e cost. di Lip. L

$V^x(f, \delta)$
ii
 $\{|x - f(y, z)| \leq \frac{\delta}{2}\}$



Curva di tipo x e costante di Lip. L

grafico $(y, z) = \phi(x)$
con $\text{Lip}(\phi) \leq L$



Tubo di tipo x e costante di Lip. L

$U^x(\phi, \delta)$
ii
 $\{|(y, z) - \phi(x)| \leq \frac{\delta}{2}\}$

Analoghe definizioni per superfici, curve, ecc. di tipo y, z .

7.1

Proposizione

Sia E un insieme nullo in \mathbb{R}^3 . Allora $E = E^* \cup F^*$ dove

(i) $\forall \varepsilon > 0$, E^* può essere ricoperto con slab $V^*(f_i, \delta_i)$ con costante di Lip. 1 in modo tale che $\sum \delta_i \leq \varepsilon$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, F^* può essere ricoperto con tubi $U^*(\phi_j, \eta_j)$ con costante di Lip. 1 in modo tale che $\sum \eta_j^2 \leq \varepsilon$.

Ma la vera domanda è:

È possibile ricoprire E con slab V_i di tipo x, y, z

Costante di Lipschitz L e spessori δ_i in modo tale che $\sum \delta_i \leq \varepsilon$?

L indipendente da ε !

Non sappiamo la risposta!

7.2

La giusta generalizzazione alla dimensione 3 del lemma di Dillworth non vale!

In A.-C.-P. si dimostra che:

Enunciato A. $\forall L, M < +\infty$, \exists un insieme finito $E \subset \mathbb{R}^3$,
t.c. E non può essere ricoperto con $M \cdot n^{1/3}$ superfici di tipo x, y, z e costante di Lip. L . $\leftarrow n := \#E$

Enunciato B. $\forall L < +\infty, \delta > 0$, \exists un insieme finito $E \subset \mathbb{R}^3$,
t.c. $\sigma_{x,L}(E), \sigma_{y,L}(E), \sigma_{z,L}(E) \leq \delta n^{1/3}$.
 $\sigma_{x,L}(E) := \max \{ \#(E \cap S) : S \text{ sup. di tipo } x \text{ e costante } L \}$

Enunciato C. $\forall L < +\infty$, \exists un insieme finito $E \subset \mathbb{R}^3$,
t.c. $\sigma_{x,L}(E), \sigma_{y,L}(E), \sigma_{z,L}(E) < n^{1/3}$.

Enunciato D. $\forall L < +\infty$, \exists un insieme finito $E \subset \mathbb{R}^3$,
t.c. $\sigma_{x,L}(E) \cdot \sigma_{y,L}(E) \cdot \sigma_{z,L}(E) < n^2$.

7.3

E' facile dare un esempio di E che quasi dimostra \mathcal{D} .

Basta infatti prendere $E = E_x \times E_y \times E_z$
con $E_x, E_y, E_z \subset \mathbb{R}$. Per ogni costante di Lip. L
si ha infatti che

$$\sigma_{x,L}(E) = \#(\pi_{yz}(E)) = \#E_y \cdot \#E_z$$

$$\sigma_{y,L}(E) = \#(\pi_{xz}(E)) = \#E_x \cdot \#E_z$$

$$\sigma_{z,L}(E) = \#(\pi_{xy}(E)) = \#E_x \cdot \#E_y$$

e quindi

$$\sigma_{x,L}(E) \cdot \sigma_{y,L}(E) \cdot \sigma_{z,L}(E) = (\#E_x)^2 (\#E_y)^2 (\#E_z)^2 = \eta^2$$

Perturbando opportunamente questo esempio
se ne ottiene uno che dimostra \mathcal{D} .

Però questi esempi non portano ad un controesempio
per l'enunciato di ricoprimento per insiemi nulli in \mathbb{R}^3 .

7.4

BIBLIOGRAFIA MINIMA

G. Alberti, M. Csörnyei, D. Preiss
Structure of null sets in the plane and applications
PROCEEDINGS OF ECM 4 (Stockholm 2004)
EUROPEAN MATH. Soc. 2005

G. Alberti, M. Csörnyei, D. Preiss
Lavoro in preparazione