C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 333-338, 1994

Un résultat de perturbations singulières avec la norme $\mathbf{H^{1/2}}$

Giovanni ALBERTI, Guy BOUCHITTÉ et Pierre SEPPECHER

Résumé – Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et W une fonction positive continue s'annulant seulement aux points α, $\beta \in \mathbb{R}$. Nous obtenons le comportement limite des fonctionnelles

$$F^\varepsilon(u) := \varepsilon \iint_{I\times I} \left|\frac{u(x)-u(y)}{x-y}\right|^2 dx\,dy + \lambda_\varepsilon \int_I W(u)\,dx \tag{1}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, $\lambda_\varepsilon \to +\infty$ et $\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to k$ $(0 < k < +\infty)$.

A singular perturbation result involving the $\mathbf{H^{1/2}}$ norm

Abstract – Let I be a bounded interval of $\mathbb{R}$ and W a continuous non negative function vanishing only at α, $\beta \in \mathbb{R}$. We obtain the asymptotic behaviour of the functionals

$$F^\varepsilon(u) := \varepsilon \iint_{I\times I} \left|\frac{u(x)-u(y)}{x-y}\right|^2 dx\,dy + \lambda_\varepsilon \int_I W(u)\,dx \tag{1}$$

when $\varepsilon \to 0$, $\lambda_\varepsilon \to +\infty$ and $\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to k$ $(0 < k < +\infty)$.

Abridged English Version – Let ε, λ_ε be sequences in $]0,+\infty[$ such that $\varepsilon \to 0$, $\lambda_\varepsilon \to +\infty$ and consider functions $W : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ satisfying the assumptions:

$$W(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \{\alpha,\beta\} \quad (\alpha < \beta) \tag{H1}$$

$$W(u) \geq C(|u|^2 - 1) \qquad (C > 0) \tag{H2}$$

Our motivation is to study the asymptotic behaviour of the functional

$$E^\varepsilon(u) := \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega W_0(u)\,dx + \lambda_\varepsilon \int_\Gamma W_1(u)\,dH^{N-1} \tag{2}$$

where W_0, W_1 satisfy (H1), (H2), and Ω is a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$ with boundary Γ. The case $\lambda_\varepsilon = 0$ or $\lambda_\varepsilon =$ constant is well known [1], [2] and leads to a mathematical justification of the usual two-phases transition model with minimal interface criterium and contact Young's law. Here we expect that, for λ_ε tending to $+\infty$ with a suitable scale, the sequences (u_ε) of finite energy have subsequences whose traces on Γ strongly converge to a function of bounded variations ranging into $\{\alpha,\beta\}$ and we expect that the associated $(N-2)$-dimensional interface on Γ between $\{u = \alpha\}$ and $\{u = \beta\}$ is taken into account in the limit energy (line tension effect).

A first step of this program is to study the asymptotic behaviour of the boundary energy on Γ given by:

$$E^\varepsilon(u) := \varepsilon ||u||^2_{1/2} + \lambda_\varepsilon \int_\Gamma W_1(u)\,dH^{N-1} \tag{3}$$

Note présenté par Luc Tartar

where $|| \; ||_{1/2}$ is the intrinsic norm of the space $H^{1/2}(\Gamma)$ [3]. This problem has its own interest and is solved in this note in the one dimensional case (i.e., Γ is an open bounded interval I).

For every function u in $L^1(I)$ we denote by S_u the jump set of u, i.e., the set of all points where u has no approximate limit. We denote by $BV(I, \{\alpha, \beta\})$ the space of functions u with bounded variations on I such that $u \in \{\alpha, \beta\}$ a.e.; it is well-known that a function u, such that $u \in \{\alpha, \beta\}$ a.e., belongs to BV if and only if S_u is finite, i.e., $\mathscr{H}^0(S_u) < \infty$. We prove that if $\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to k$, the limit energy associated to F^ε defined by (1) is given by

$$F(u) := \begin{cases} 2k\,(\beta-\alpha)^2\,\mathscr{H}^0(Su) & \text{if } u \in BV(I, \{\alpha, \beta\}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

Theorem. – *Assuming* (H1), (H2) *and* $\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to k$ *(*$0 < k < +\infty$*), then:*

(i) *Every sequence such that* sup $F^\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$ *is strongly relatively compact in* $L^1(I)$ *and every cluster point* u *belongs to* $BV(I, \{\alpha, \beta\})$.

(ii) *Every sequence* (u_ε) *converging to* u *in* $L^1(I)$ *satisfies*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u) \; .$$

(iii) *For every* u *in* $L^1(I)$ *there exists* (u_ε) *converging to* u *in* $L^1(I)$ *such that:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u) \; .$$

Comments:

1) In the Γ-convergence theory setting, assertions (ii) and (iii) mean that F^ε Γ-converges to F in $L^1(I)$. Note that F^ε and F are both lower semicontinuous in $L^1(I)$ and have minimizers on every closed subset of $L^1(I)$.

2) In assertion (iii) we may modify (u_ε) in such a way that it satisfies the constraint $\int_I u_\varepsilon \, dx = \int_I u \, dx$. As a consequence (setting $\eta = \varepsilon/\lambda_\varepsilon$), we get the estimate as $\eta \to 0$ for the variational problems ($\gamma \in]\alpha, \beta[$):

$$(P_\eta) \;\; \inf \left\{ \int_{[0,1]} W(u)\, dx + \eta \iint_{[0,1]^2} \left| \frac{u(x)-u(y)}{x-y} \right|^2 dx\, dy \; , \quad \int_{[0,1]} u \, dx = \gamma \right\} \sim 2(\beta-\alpha)^2 \eta \, |\log \eta| \; .$$

Note that this estimate does not depend on the behaviour of W between α and β.

3) In the limit process we get an improvement of the regularity: informations upon the half-derivative of u_ε ($H^{1/2}$ norm) lead to informations upon the first order derivative of the limit u (u' is a bounded atomic measure).

4) A similar result can be deduced in higher dimension and will be used in a forthcoming paper [4] where we propose a new model of phase transition with line tension effects.

5) The proof essentially relies on the estimate (6) which follows from a rearrangement lemma (lemma 2). When writing the final draft of this note, we where told that another proof of this lemma has been proposed by F. Brock.

I. Introduction et énoncé du résultat. – Soit ε, λ_ε des suites réelles positives telles que $\varepsilon \to 0$, $\lambda_\varepsilon \to +\infty$, $\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to k$ où $k \in]0, +\infty[$. La motivation de ce travail est l'étude du comportement asymptotique de la fonctionnelle (2) dans laquelle W_0, W_1 vérifient les hypothèses (H1) and (H2), Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ. Le cas $\lambda_\varepsilon = 0$ ou $\lambda_\varepsilon =$ constant est bien connu [1], [2] et donne une justification mathématique du modèle usuel d'un milieu diphasique avec une énergie capillaire et un angle de contact donné par la loi de Young.

Quand λ_ε tend vers $+\infty$ de manière convenable, le résultat attendu est que les traces sur Γ des suites d'énergie finie convergent fortement dans $L^1(\Gamma)$ vers une fonction à variations bornées prenant ses valeurs dans $\{\alpha, \beta\}$, l'interface (de dimension $N-2$) séparant les ensembles $\{u = \alpha\}$ et $\{u = \beta\}$ sur Γ étant prise en compte dans l'énergie limite (effet de tension de ligne).

Une première étape est d'estimer l'énergie sur le bord Γ définie par l'équation (3) dans laquelle $|| \, ||_{1/2}$ désigne la norme intrinsèque de $H^{1/2}(\Gamma)$ [3]. Ce problème, intéressant par lui-même, est résolu dans cette note dans le cas de la dimension 1 (Γ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ noté I).

Pour tout $u \in L^1(I)$ on note S_u l'ensemble des points de I où u n'a pas de limite approximative. On note $BV(I, \{\alpha, \beta\})$ l'ensemble des fonctions à variations bornées à valeurs dans $\{\alpha, \beta\}$; Il est bien connu qu'une fonction u, telle que $u \in \{\alpha, \beta\}$ p.p. , est dans BV si et seulement si S_u est fini , i.e., $\mathscr{H}^0(S_u) < \infty$.

Nous montrons que si $\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to k$, l'énergie limite associée à F^ε définie par (1) est donnée par (4).

THÉORÈME. – *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2) *et* $\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to k$ *(*$0 < k < +\infty$*), on a:*

(i) *Toute suite* (u_ε) *telle que* $\sup F^\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$ *est fortement relativement compacte dans* $L^1(I)$ *et toute valeur d'adhérence* u *appartient à* $BV(I, \{\alpha, \beta\})$.

(ii) *Pour toute suite* (u_ε) *tendant vers* u *dans* $L^1(I)$ *on a l'inégalité:*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u) \ .$$

(iii) *Pour tout* u *dans* $L^1(I)$ *il existe une suite* (u_ε) *tendant vers* u *dans* $L^1(I)$ *telle que:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u) \ .$$

Commentaires:

1) Dans le formalisme de la Γ-convergence les assertions (ii) et (iii) signifient que F^ε Γ-converge vers F dans $L^1(I)$. Notons que les fonctionnelles F^ε et F sont toutes deux semi-continues inférieurement dans $L^1(I)$ et sont minimisables sur toute partie fermée de $L^1(I)$.

2) Dans l'assertion (iii) on peut aisément ajuster la suite (u_ε) de facon à satisfaire la contrainte $\int_I u_\varepsilon \, dx = \int_I u \, dx$. On en déduit immédiatement (en posant $\eta = \varepsilon / \lambda_\varepsilon$) une estimation quand $\eta \to 0$ pour la suite de problèmes (P_η). On notera que cette estimation ne dépend pas de la forme de W entre α et β.

3) Le passage à la limite en ε se traduit par une augmentation de la régularité: des informations sur la demi-dérivée de u_ε (norme dans $H^{1/2}$) on tire des informations sur la dérivée d'ordre 1 de la limite u (u' est une mesure bornée purement atomique).

4) Ce résultat peut être étendu en dimension supérieure et sera utilisé dans [4] où nous proposons un nouveau modèle de transition de phases avec tension de ligne.

5) La démonstration repose essentiellement sur l'estimation (6) qui elle-même découle d'un lemme (lemme 2). Lors de la rédaction finale de cette note, nous avons appris qu'une démonstration de ce lemme était proposée par F. Brock.

II. COMPACITÉ ET ESTIMATION DE LA LIMITE INFÉRIEURE DES ÉNERGIES. – Définissons tout d'abord les fonctionnelles localisées en posant pour tout $\varepsilon > 0$, $u \in L^1(I)$ et pour tout ouvert $J \subset I$:

$$F^\varepsilon(u, J) := \varepsilon \iint_{J \times J} \left| \frac{u(x) - u(y)}{x - y} \right|^2 dx \, dy + \lambda_\varepsilon \int_J W(u) \, dx \ . \tag{5}$$

LEMME 1. – *Soit* $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in L^1(I)$, *et un intervalle* $J \subset I$. *Pour tout* δ *tel que* $0 < \delta < \frac{\beta - \alpha}{2}$, *définissons* A_ε *et* B_ε *les ensembles des points* x *de* I *vérifiant respectivement* $u_\varepsilon(x) \leq \alpha + \delta$ *et*

$u_\varepsilon(x) \geq \beta - \delta$, *et posons*

$$a_\varepsilon := \frac{|A_\varepsilon \cap J|}{|J|} \ , \quad b_\varepsilon := \frac{|B_\varepsilon \cap J|}{|J|} \ , \quad \sigma := \inf \big\{ W(t) : \alpha + \delta \leq t \leq \beta - \delta \big\} \ .$$

Nous avons:

$$F^\varepsilon(u_\varepsilon, J) \geq 2(\beta - \alpha - 2\delta)^2 \varepsilon \left[\log(a_\varepsilon b_\varepsilon) + \log \lambda_\varepsilon - \log \left(\varepsilon \frac{2(\beta - \alpha - 2\delta)^2}{\sigma |J|} \right) \right] \ . \tag{6}$$

LEMME 2. – *Soit φ une fonction positive décroissante sur $]0, +\infty[$, étant donné deux boréliens A et B dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue a et b, on pose $\Phi(A,B) := \iint_{A \times B} \varphi(|x-y|)\, dx\, dy$. Alors si $A \cup B \subset [X, Y]$ et $A \cap B = \emptyset$, on a l'inégalité:*

$$\Phi(A, B) \geq \Phi([X, X + a], [Y - b, Y]) \tag{7}$$

Démonstration du lemme 2. – On note $A \prec B$ si $x < y$ pour tout (x, y) dans $A \times B$. On note $g_x(A) := [x - a, x]$, $d_x(B) := [x, x + b]$. Remarquons tout d'abord que si $\{X\} \prec A \prec B \prec \{Y\}$ on a:

$$\Phi(A, B) \geq \Phi(d_X(A), B) \quad \text{et} \quad \Phi(A, B) \geq \Phi(A, g_Y(B)) \tag{8}$$

En effet posons $h(x) := X + \int_X^x \ 1_A(t)\ dt$. On a $h(x) \leq x$ sur $[X, +\infty[$ d'où:

$$\begin{aligned} \Phi(A, B) = \int_B \int_A \varphi(y - x)\, dx\, dy &\geq \int_B \int_X^{+\infty} \ \varphi(y - h(x))\ 1_A(x)\, dx\, dy \\ &\geq \int_B \int_X^{a+X} \ \varphi(y - u)\ du\ dy = \Phi(d_X(A), B) \end{aligned}$$

Ceci démontre la première inégalité, l'autre se démontre de la même manière.

Montrons maintenant le lemme dans le cas où $A \subset A'$ et $B \subset B'$, A' et B' étant des réunions d'intervalles fermés $A' = \bigcup_{i=1}^{n_A} A'_i$, $B' = \bigcup_{i=1}^{n_B} B'_i$, $A' \cup B' \subset [X, Y]$, A'_i et B'_j étant des intervalles fermés disjoints. La démonstration se fait par récurrence sur $n_A + n_B$. Au rang 1, A ou B est vide et la proposition est triviale. Supposons le résultat vrai pour $n_A + n_B \leq N$. On peut supposer sans nuire à la généralité que A est non vide et que $A'_1 \prec (\bigcup_{i \neq 1} A'_i) \cup (\bigcup_i B'_i)$. On note $A_i = A \cap A'_i$ et $a_1 =| A_1 |$. D'après (8) on a:

$$\Phi(A, B) = \Phi(A_1, B) + \Phi(\bigcup_{i \neq 1} A_i, B) \geq \Phi(d_X(A_1, B) + \Phi(\bigcup_i A_i, B)$$

et

$$F(d_X(A_1), B) \geq \Phi(d_X(A_1), g_Y(B))$$

et d'après l'hypothèse de récurence appliquée à $\bigcup_{i \neq 1} A_i$ et B dans $[X + a_1, Y]$:

$$\Phi(\bigcup_{i \neq 1} A_i, B) \geq \Phi(d_{X + a_1}(\bigcup_{i \neq 1} A_i), g_Y(B)) \ .$$

Le résultat découle alors du fait que $d_X(A_1) \cup d_{X+a1}(\bigcup_{i \neq 1} A_i) = d_X(A)$. Le lemme est dons démontré dans le cas de deux compacts disjoints. Il s'étend au cas de deux boréliens disjoints par approximation intérieure. □

Démonstration du lemme 1. – En appliquant le lemme 2 avec $\varphi = 1/t^2$ on obtient:

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(u_\varepsilon, J) &= \varepsilon \iint_{J\times J} \left| \frac{u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)}{x-y} \right|^2 dx\,dy + \lambda_\varepsilon \int_J W(u_\varepsilon)\,dx \\ &\geq \varepsilon(\beta - \alpha - 2\delta)^2 \iint_{(A_\varepsilon\times B_\varepsilon)\cup(B_\varepsilon\times A_\varepsilon)} \frac{1}{|x-y|^2} dx\,dy + \lambda_\varepsilon\,\sigma \big| J \setminus (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \big| \\ &\geq 2\varepsilon\,(\beta-\alpha-2\delta)^2 \Big[\log(a_\varepsilon b_\varepsilon) - \log(1 - a_\varepsilon - b_\varepsilon) + \frac{\lambda_\varepsilon \sigma |J|}{2\varepsilon\,(\beta-\alpha-2\delta)^2}(1 - a_\varepsilon - b_\varepsilon) \Big] \ . \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité

$$-\log x + Mx \geq \log M$$

avec

$$M := \frac{\lambda_\varepsilon \sigma |J|}{2\varepsilon\,(\beta-\alpha-2\delta)^2} \quad \text{et} \quad x := (1 - a_\varepsilon - b_\varepsilon) \ . \qquad \square$$

Démonstration de (i) *et* (ii). – Remarquons d'abord que, si $F^\varepsilon(u_\varepsilon, I) \leq M$ pour tout ε, alors:

$$\int_I W(u_\varepsilon)\,dx \leq \frac{M}{\lambda_\varepsilon} \ \Rightarrow \ W(u_\varepsilon) \to 0 \quad \text{dans } L^1(I).$$

Grâce à l'hypothèse (H2), (u_ε) est faiblement relativement compacte dans $L^1(I)$. Soit (ν_x) la mesure de Young associée à une sous-suite convergente (notée encore (u_ε)) de limite faible u. Comme $W(u_\varepsilon) \to 0$ on a:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} t\ \nu_x(dt) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} W(t)\ \nu_x(dt) = 0 \text{ p.p.}$$

Grâce à l'hypothèse (H1), il existe une fonction θ à valeurs dans $[0,1]$ telle que:

$$\nu_x(dt) = \theta(x)\delta_\alpha(dt) + (1-\theta(x))\delta_\beta(dt) \quad \text{et} \quad u(x) = \theta(x)\alpha + (1-\theta(x))\beta \ .$$

Il s'agit maintenant de montrer que $\theta(x) \in BV(I, \{0,1\})$. Soit J un intervalle ouvert de I et $\delta \in \,]0, (\beta-\alpha)/2[$. D'après le lemme 1, nous avons:

$$F^\varepsilon(u_\varepsilon, J) \geq 2(\beta-\alpha-2\delta)^2 \varepsilon \left[\log(a_\varepsilon b_\varepsilon) + \log(\lambda_\varepsilon) + \log(C\varepsilon) \right] \ . \tag{9}$$

D'autre part on vérifie aisément que:

$$a_\varepsilon \to a := \frac{\int_J \theta\,dx}{|J|} \quad \text{et} \quad b_\varepsilon \to b := \frac{\int_J (1-\theta)\,dx}{|J|} \ .$$

Dans le cas où $ab > 0$, en utilisant le fait que $\varepsilon\ \log\lambda_\varepsilon \to k$ et que δ est arbitraire, le passage à la limite quand ε tend vers 0 dans (9) conduit à:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon, I) \geq 2k\,(\beta-\alpha)^2 \ . \tag{10}$$

Considérons l'ensemble S des points où la limite approximative de θ est dans $]0,1[$. Pour tout entier $N \leq \mathscr{H}^0(S)$ il existe des intervalles disjoints I_n, $n = 1, \ldots, N$, tels que $I_n \cap S \neq \emptyset$ pour tout n, et pour lesquels les quantités a et b associées sont non nulles. Grâce à (10) et à la sur-additivité de F^ε on obtient:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon, I) \geq \sum_1^N \liminf_{\varepsilon\to 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon, I_n) \geq 2k\,(\beta-\alpha)^2 N \ . \tag{11}$$

En conséquence S est fini, $\theta \in \{0,1\}$ p.p., ce qui prouve (i). De plus (11) implique (ii). $\square$

III. Estimation de la limite supérieure des énergies. – La proposition (iii) du théorème en démontrant par récurrence sur N la proposition suivante: J étant un intervalle tel que $\mathscr{H}^0(S_u \cap J) = N$, il existe ρ_0 tel que pour tout $\rho \in]0,\rho_0[$, on peut trouver une suite (u_ε) telle que:

$$u_\varepsilon \to u \ , \quad F^\varepsilon(u_\varepsilon, J) \to 2kN(\beta-\alpha)^2 \text{ et } \quad d(x, S_u) > \rho \Rightarrow u_\varepsilon(x) = u(x) \ .$$

Pour $N = 1$, posons $S_u \cap J =: \{x_1\}$ et:

$$A_\varepsilon := J \cap \Big] -\infty, x_1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_\varepsilon}\Big[\ , \quad B_\varepsilon := J \cap \Big] x_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_\varepsilon}, +\infty\Big[\ , \quad C_\varepsilon := \ \Big] x_1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_\varepsilon}, x_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_\varepsilon}\Big[\ .$$

Définissons u_ε comme la fonction continue, égale à u sur $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ et affine sur C_ε. On a:

$$F^\varepsilon(u_\varepsilon, J) \sim 2\varepsilon \iint_{A_\varepsilon \times B_\varepsilon} \left| \frac{u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)}{x-y} \right|^2 dx\, dy \sim 2\varepsilon(\beta-\alpha)^2 |\log(\varepsilon/\lambda_\varepsilon)| \sim 2k(\beta-\alpha)^2 \ .$$

Pour $N > 1$, posons

$$S_u \cap J =: \{x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1}\} \ , \quad \delta := \frac{x_{N+1} - x_N}{5}$$

et

$$J' := J \cap]-\infty, x_N + 2\delta[\ , \quad J'' := J \cap]x_{N+1} - 2\delta, +\infty[\ , \quad C := J \setminus (J' \cup J'') \ .$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang N sur J' et au rang 1 sur J'' avec $\rho_0 < \delta$ On obtient u'_ε et u''_ε deux suites approximantes de u sur J' et J''. On définit u_ε par $u_\varepsilon := u'_\varepsilon$ sur J', $u_\varepsilon := u''_\varepsilon$ sur J'', $u_\varepsilon := u$ sur C. On a:

$$F^\varepsilon(u_\varepsilon, J) \sim F^\varepsilon(u'_\varepsilon, J') + F^\varepsilon(u''_\varepsilon, J'') + \varepsilon \iint_{J' \times J'' \cup C \times (J' \cup J'')} \left| \frac{u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)}{x-y} \right|^2 dx\, dy \ .$$

L'intégrale sur $J' \times J''$ est majorée par $(\alpha-\beta)^2/\delta^2$. Dans la deuxième intégrale $C \times (J' \cup J'')$ peut être remplacé par $C \times (J \setminus [x_N + \delta, x_{N+1} - \delta])$, cette intégrale est donc aussi majorée par $(\alpha-\beta)^2/\delta^2$. Ainsi $F^\varepsilon(u_\varepsilon, J)$ converge vers $2(N+1)k(\beta-\alpha)^2$ et la proposition est démontrée à l'ordre $N+1$. $\square$

Note remise le 6 mai 1994, acceptée le 26 mai 1994

References Bibliographiques

[1] Modica L.: The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterium, *Arch. Rational Mech. Anal.* **98** (1987), 123-142.

[2] Modica L.: Gradient theory of phase transitions with boundary contact energy, *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire* **5** (1987), 453-486.

[3] Adams R.A.: *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[4] Alberti G., Bouchitte G., Seppecher P.: Phase transition with line tension effect, en préparation.

G.A. : *Istituto di Matematiche Applicate, via Bonanno 25/B, 56126 Pisa, Italie.*

G.B. et P.S. : *UFR Science, Université de Toulon et du Var*, BP 132, *83957 La Garde Cedex, France.*