CORSO: **Analisi Matematica 1**
ANNO ACCADEMICO: **2023-24**
DOCENTI: **Giovanni Alberti, Alessandra Pluda**
CODICE ESAME: **561AA**
NUMERO DI CREDITI: **15**
NUMERO DI ORE: **120**
CORSO DI STUDIO: **Matematica triennale (MAT-L)**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa del calcolo differenziale ed integrale per le funzioni di una variabile e delle equazioni differenziali lineari.

Struttura del corso. Il corso è diviso in due parti: "Calcolo" e "Analisi". Lo scopo della prima parte è familiarizzare lo studente con l'uso di derivate ed integrali per funzioni di una variabile; particolare attenzione viene dedicata alle applicazioni di questi strumenti, quali lo studio qualitativo dei grafici di funzioni, il calcolo di aree e volumi, e la risoluzione di alcune classi di equazioni differenziali. La seconda parte del corso è dedicata invece alle basi teoriche dell'Analisi Matematica, dalla completezza dei numeri reali e teoremi collegati, all'integrazione secondo Riemann e alla teoria delle serie.

Programma del corso [versione: 8 luglio 2024].
Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

Prima parte: Calcolo.

1. RICHIAMO DI ALCUNE NOZIONI DI BASE
   - Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
   - Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ
   - Funzioni continue; definizione, proprietà di base e continuità delle funzioni elementari (le dimostrazioni sono rimandate alla seconda parte del corso).
   - Limiti di funzioni: definizione e significato; proprietà di base.

3. DERIVATE
   - Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate (dimostrazioni parziali, cf. seconda parte del corso).
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra; notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital (dimostrato nella seconda parte del corso). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
   - Sviluppo di Taylor di una funzione; rappresentazione del resto di Taylor come "o piccolo" e "o grande" (formule del resto di Peano). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
   - Massimo e minimo di un insieme di numeri reali; valore massimo e valore minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme (nel caso che si scriva come unione finita di intervalli); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione.

- Nei punti di massimo e minimo locali interni al dominio la derivata (se esiste) vale zero. Procedura per la determinazione del valore massimo e minimo (oppure dell'estremo superiore ed inferiore dei valori) di una funzione continua definita su un'unione finita di intervalli (la giustificazione completa della procedura è rimandata al secondo semestre).
- Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata; funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda (dimostrazioni parziali; quelle complete vengono date nella seconda parte del corso). Disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (dimostrazione parziale, cf. seconda parte del corso).
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
   - Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.
   - La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
   - Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: esempi e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque: teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione); struttura dell'insieme delle soluzioni; risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annichilatori; variazione delle costanti.

Seconda parte: Analisi.

6. Basi di teoria degli insiemi.
   - Prodotto di due insiemi. Le funzioni $f : A \to B$ intese come grafici. L'insieme B^A delle funzioni da A ad B; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un insieme A.
   - Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
   - Insiemi finiti e infiniti, numerabili e più che numerabili.
   - L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili; i numeri reali sono più che numerabili. Insiemi con uguale cardinalità.

7. Completezza dei numeri reali
   - I numeri reali estesi. Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
   - *Insiemi ordinati (parzialmente o totalmente); definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme di un insieme ordinato; definizione di estremo superiore ed inferiore; assioma di completezza ed equivalenza con l'esistenza dell'estremo superiore/inferiore; definizione di insieme ordinato completo. Definizione di campo ordinato; caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

8. Successioni di numeri reali
   - Limite di una successione di numeri reali; possibili comportamenti di una successione.
   - Le successioni monotone hanno limite.
   - Caratterizzazione delle successioni convergenti (con limite finito) come successioni di Cauchy.

- Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.
- Limite inferiore (liminf) e limite superiore (limsup) di una successione.
- Successioni definite per ricorrenza; formula esplicite per successioni definite da ricorrenze lineari. *Successione di Fibonacci.*

9. Funzioni continue
   - Rivisitazione della definizione di continuità e di limite di una funzione in termini di intorni.
   - Caratterizzazione della continuità di una funzione in termini di limiti.
   - Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.
   - Teorema di esistenza degli zeri (e dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.
   - Teorema di Weierstrass: esistenza dei punti di massimo e minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso. Giustificazione della procedura per la ricerca dei massimi e dei minimi vista nella prima parte del corso.
   - Le funzioni continue e strettamente monotone su un intervallo hanno inversa continua.

10. Derivate
    - Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta, della funzione inversa.
    - Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
    - Uso dei teoremi di Cauchy e di Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati nella prima parte del corso: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata; teorema di de L'Hôpital.
    - Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.

11. Integrale secondo Riemann
    - Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine-Cantor: una funzioni continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.
    - Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
    - *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni dettagliate). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
    - Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.

12. Integrali impropri
    - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
    - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
    - Integrali impropri non semplici.
    - *Rappresentazione del fattoriale come integrale improprio e formula di Stirling (con cenno di dimostrazione).*

13. Serie numeriche
    - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
    - Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
    - Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
    - Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.

14. Serie di potenze

- Serie di potenze: definizione, raggio di convergenza, comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).
- Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$. Rappresentazione del numero e come serie. Definizione di e^z con z numero complesso e dimostrazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Rappresentazione di $\pi/4$ come serie.*

Prerequisiti. Una solida conoscenza delle parti *essenziali* del programma di matematica comune alla maggior parte delle scuole superiori. All'inizio del corso è previsto un veloce ripasso di alcuni argomenti fondamentali. Per la teoria delle equazioni differenziali lineari è necessaria la conoscenza di alcune nozioni di base di Algebra Lineare.

Testi di riferimento. Il corso non segue esattamente alcun testo particolare e si raccomanda quindi di frequentare le lezioni. Gli argomenti svolti nel corso sono comunque presenti in tutti i libri di testo universitari per i corsi di base Analisi Matematica. Tra i vari testi in circolazione si segnalano:

- E. Acerbi, G. Buttazzo: *Primo corso di analisi matematica.* Pitagora, Bologna, 1997.
- E. Giusti: *Analisi Matematica 1* (terza edizione). Bollati Boringhieri, Torino, 2002.
- C. Pagani, S. Salsa: *Analisi Matematica 1* (seconda edizione). Zanichelli, Bologna, 2015.
- M. Ghisi, M. Gobbino: *Schede di analisi matematica* Esculapio, Bologna, 2010.
  Questo testo contiene molti esercizi ed un buon compendio delle nozioni fondamentali, ma non sostituisce un libro di testo per quanto riguarda la parte teorica del corso.

Comunicazioni e materiale didattico. Per tutte le comunicazioni riguardanti il corso viene utilizzato un team sulla piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa (link al team). Il team viene anche usato per mettere a disposizione il materiale didattico del corso, i testi e gli scritti d'esame, e per eventuali ricevimenti online.
Sulla pagina web di Giovanni Alberti (link) sono disponibili i testi e le soluzioni delle prove d'esame di corsi analoghi tenuti dal docente negli anni precedenti.

Struttura dell'esame. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale.

La prova scritta è a sua volta suddivisa in due parti: la prima consiste di 9 domande elementari a cui rispondere senza dare giustificazioni, mentre la seconda consiste di 3 o più esercizi a cui dare una soluzione articolata e motivata.
Per la sufficienza nella prima parte sono richieste almeno sei risposte corrette. Per la piena sufficienza nella seconda parte è richiesto lo svolgimento completo di almeno due esercizi.
Il tempo a disposizione per la prima parte è un'ora o poco più, mentre per la seconda è due ore.
Per l'ammissione alla seconda parte è necessaria la sufficienza nella prima.
Durante la prova scritta non è consentito l'uso di libri di testo, appunti o calcolatrici grafiche.

L'orale ha lo scopo di verificare la conoscenza della parte teorica del corso e la capacità di risolvere esercizi (qualora questa non sia stata sufficientemente dimostrata nella prova scritta).
Per l'ammissione all'orale è richiesta la sufficienza nella seconda parte dello scritto.

La prova orale va sostenuta nello stesso appello dello scritto.[1]

Il voto delle prove scritte varia tra *non sufficiente* (NS), *quasi sufficiente* (QS), *sufficiente* (S), *discreto* (D), *buono* (B), *molto buono* (MB).
In linea di massima il voto finale viene definito dall'orale all'interno della fascia di voti determinata dal risultato dello scritto: QS → 18–21, S → 18–24, D → 20–27, B → 23–30, MB → 26–30 e lode.

Appelli. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame così distribuiti: due a giugno e luglio, uno a settembre, due a gennaio, febbraio.

[1] Per gli studenti delle cosidette categorie protette (cioè studenti lavoratori, fuoricorso, oppure in maternità) vale quanto segue: se hanno passato lo scritto nell'appello di settembre possono sostenere l'orale nell'appello straordinario di novembre; se invece hanno passato lo scritto nell'appello di febbraio possono sostenere l'orale nell'appello straordinario di aprile. Attenzione: gli appelli straordinari in questione sono riservati alle categorie protette e non prevedono la prova scritta, che deve quindi venir passata nell'appello regolare subito prima.

Sono inoltre previste due prove in itinere (compitini), una a metà corso e una alla fine. Chi ottiene la sufficienza in entrambe le prove è ammesso direttamente all'orale, che può sostenere dopo la seconda prova oppure in uno degli appelli di giugno e luglio.

Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi alla corrispondente prova scritta sul portale esami (link).
Per l'orale non è necessaria alcuna iscrizione.