Corso di ANALISI MATEMATICA I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2021-22

ESERCIZI-1

---

1. Se l'equazione $x^2 + ax + b = 0$ ha soluzioni 5 e 1, quanto valgono a e b?

2. Risolvere
   (a) $|-4 - x^2| = 9$;
   (b) $|2x - 3| - |1 - 2x| = 4$;
   (c) $|x^2 - x| - 2 \leq |x - 2|$.

3. Risolvere
   (a) $\sqrt{x^3 + x^2 - 2} < x$;
   (b) $\sqrt{9x^2 + 2x} \geq 3x - 4$;
   (c) $\frac{x-1}{x^2-4} > 0$.

4. Risolvere
   (a) $\sin(x) = -1$;
   (b) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ con $x \in [0, 2\pi]$;
   (c) $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ cone $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Risolvere
   (a) $2^{x^2} = 4$;
   (b) $\log(\log x) \geq 1$;
   (c) $\log_4(e^x + 1) = 3$.

6. Disegnare il grafico delle funzioni:
   (a) $x^2 - 2$;
   (b) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$;
   (c) $-x^2$;
   (d) $-x^3 + 1$;
   (e) $-(x^3 + 1)$.

7. Disegnare il grafico delle funzioni:
   (a) $e^{|x|} - 1$;
   (b) $|1 - e^x|$;
   (c) $\log(1 + |x|)$;
   (d) $\log|1 + x|$;
   (e) $|\log x| + 1$.

8. Dato un rombo di lato 1 scrivere una formula per calcolare la somma delle sue diagonali in funzione di un suo angolo α.

9. Disegnare il grafico di $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ e risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq x$.

10. Disegnare linsieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq 0$.

Corso di ANALISI MATEMATICA I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2021-22

ESERCIZI-2

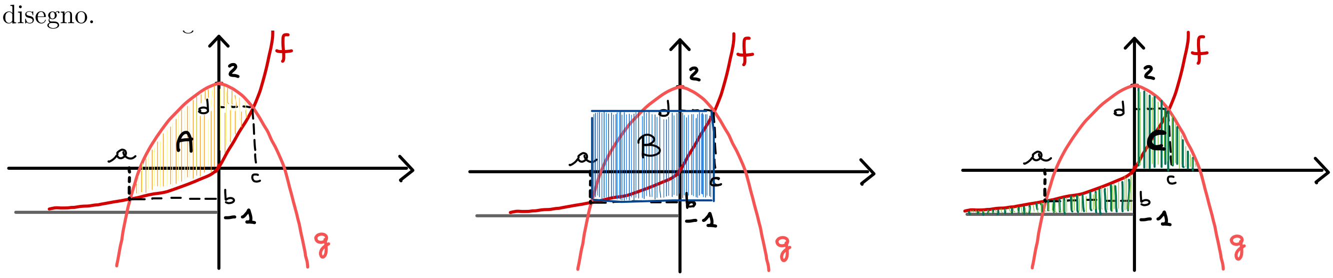
---

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   (a) $x = -2$, $y = 2$; $\rho =$ ......, $\alpha =$ ......;
   (b) $x = 0$, $y = -4$; $\rho =$ ......, $\alpha =$ ....;
   (c) $\rho = 2\sqrt{3}$; $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; $x =$ ...., $y =$ ....;
   (d) $\rho = 2$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $x =$ ...., $y =$ ....
   Per le coordinate polari indicare un angolo compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i valori dei due parametri reali a e b per cui vale
$$-4\cos(x - \frac{\pi}{3}) = a\sin x + b\cos x\,.$$

3. * Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ comprese tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

4. Descrivere in termini di disuguaglianze gli insieme di punti del piano A e B rappresentati nel disegno.



;

5. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano che soddisfano $|y| \leq e^{-x} - 1$.

6. * Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$|\,(x+1)^4 - 1| = a\,.$$

7. Determinare l'insieme di definizione di:
   (a) $f(x) = \sin(x) + \log(x)$;
   (b) $f(x) = \log(\log(x))$;
   (c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-2x}} + \sqrt{\frac{x+1}{9-x^2}}$;
   (d) $f(x) = x^2 + \sqrt{-\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|}$.

8. Determinare l'immagine di:
   (a) $f(x) = x^2 - 3$;
   (b) $f(x) = e^{-x} + 3$;
   (c) $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$.

9. ** Disegnare $\arctan(\tan(x))$.

10. ** Sia $k \in \mathbb{Z}$ e f_k la restizione di $\sin(x)$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$. Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la funzione f_k è invertibile e trovare la sua inversa. Disegnare inoltre $\arcsin(\sin(x))$.

AVVERTENZA:
Un asterisco * indica esercizi in cui bisgona pensare un po', non di diretta applicazione della formula, ma che appaiono regolarmente negli scritti di esame. Quindi è bene imparare a

farli.
Due asterischi ** indicano gli esercizi difficili, che potrebbero anche apparire negli scritti, ma non sono esercizi standard. Sono esercizi per chi ha voglia di mettersi un po' alla prova, è un successo anche se riuscite a farli solo parzialmente.

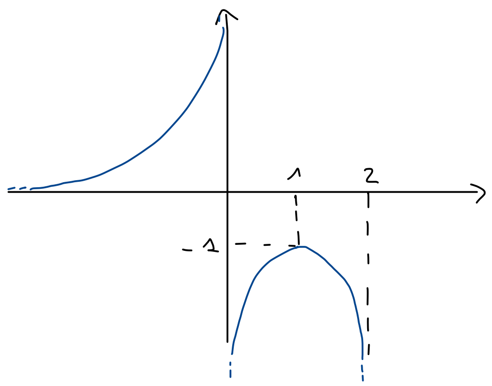
Corso di ANALISI MATEMATICA I per Ingegneria Gestionale, a.a. 2021-22

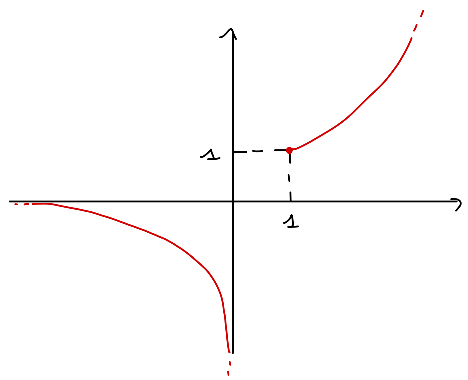
ESERCIZI-3

---

1. * Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - (a + a^2)x + a^3}$ è tutto $\mathbb{R}$.

2. I seguenti disegni rappresentano grafici di funzioni. Determinare dominio, immagine e scrivere i limiti rilevanti.





3. Calcolare i seguenti limiti:

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$,
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 (\cos(x) - 2)$,
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 + \left(\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right)^2$,
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} (\cos(x + 3\pi))$,
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x (7 + \sin(x))$,
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x-1}}{4^{x+1}}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2 e^{-x}$,
- $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$,
- $f(x) = \exp(1 + x^2)$,
- $f(x) = 2^{6x}/4^{2x}$,
- $f(x) = \dfrac{e^{2x+4x^2}\cos(x)}{x}$,
- $f(x) = \log(\dfrac{e^{x+1}}{x^2-1})$,
- $f(x) = \dfrac{e^{\log(x^2-4)}}{x-2}$,
- $f(x) = 3^x + 3^{\sin x}$,
- $f(x) = x \arcsin(x)$,
- $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$,
- $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$,
- $f(x) = \log(1 + \tan(x))$,
- $f(x) = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,
- $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x-2}$,
- $f(x) = \log_3 \sqrt{x+2}$.

5. * Sia $F(x) = f(g(x))$. Siano $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, $g'(5) = 6$, trovare $F'(5)$.

6. Trovare la retta tangente al grafico di $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ in $x = -3$.

7. * Trovare $k \in \mathbb{R}$ e $x_0 > 0$ tali che la retta $y = kx$ è tangente in x_0 al grafico di $y = e^x$.

8. ** Sappiamo che la retta tangente al grafico di una certa funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = -1$ ha equazione $y = 2x$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x) := f(-1/x^2)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

9. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ ax^2 + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

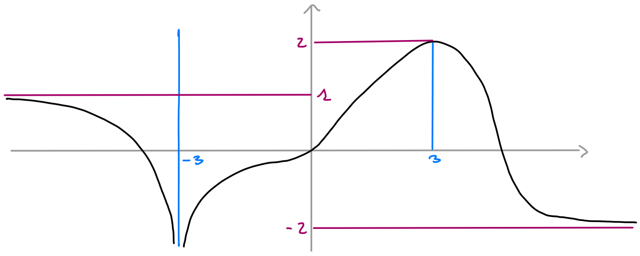
10. Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ e data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c \end{cases}$ determinare a e b in funzione di c, in modo che esista $f'(c)$.

AVVERTENZA:
Un asterisco *: medio-difficile.
Due asterischi **: difficile.

Esercizi-4

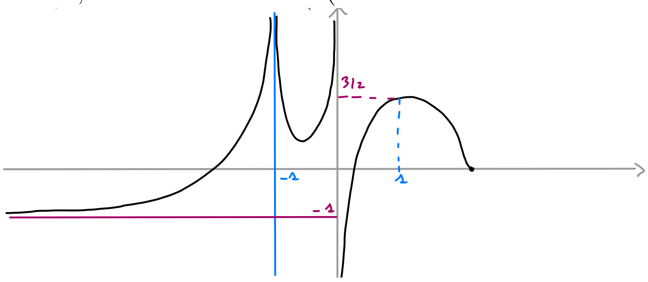
---

1. Dato il grafico della funzione f disegnato nella seguente figura, trovare dominio di f, immagine di f e scrivere i limiti rilevanti.



;

2. Sulla base del grafico disegnato nella seguente figura, dire quali sono i limiti di $f(x)$ per $x \to 0$, $x \to 1$, $x \to -1$ e $x \to -\infty$ (se la domanda ha senso e se esistono).



;

3. Associare ad ogni affermazione a)–b)–c) la sua definizione tra 1)–2)–3):
   a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ con $x_0, \ell \in \mathbb{R}$;
   b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$;
   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$.

   1) $\forall M \in \mathbb{R}\,, \exists\, x_M \in \mathbb{R}$ tale che $x \le x_M \implies f(x) \ge M$;
   2) $\forall \varepsilon > 0\,, \exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $x \ge x_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| \le \varepsilon$;
   3) $\forall \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \neq x_0$ con $|x - x_0| \le \delta_\varepsilon$ vale $|f(x) - \ell| \le \varepsilon$.

4. Vero o falso?
   A- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$.
   B- Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in X$. Se f è continua in x_0, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   C- Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in X$; f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   D- Se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = b$ con $a \neq b$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ vale a o b.
   E- Se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = b$ con $a \neq b$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste.

5. Riordinare le funzioni in modo da ottenere un'affermazione corretta, per $x \to +\infty$:

   - $$\frac{x^4}{x^2+1} \ll \log(x+1) \ll \frac{2^x}{3^x} \ll x^3\,,$$
   - $$x^2 \log x \ll \frac{x^5+x^3}{x^2+x^4} \ll \frac{7^x}{4^x+x^4} \ll \log(x+\sin(x))\,,$$
   - $$2^x + x^2 \ll \frac{\log x}{x^2} \ll \frac{2x}{1+x^3} \ll x2^x\,.$$

6. Dire per quali a la funzione $f(x) = x^5$:
   - è $O(x^a)$;
   - è $o(x^a)$;
   - è $O(x^{a+1})$;
   - è $o(x^{a+1})$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\frac{3^x}{x^2+1} = o(a^x)$ per $x \to +\infty$.

8. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\frac{\sin x + \log^2 x}{x \log x}$ è $o(x^a)$ per $x \to 0$.

9. Calcolare i seguenti limiti:
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt{x})}{x^2}\,,$
   - $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{2x}{\sin(x)}\,,$
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log(x)+1}}{x}\,,$
   - $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{2-\sin(x)}{\tan(x)}\,,$
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{e^{x^2}}\,,$
   - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \log(2+e^x)\,.$

10. Sia $f(x) = x^5 + x + 1$ e $g(x)$ la sua funzione inversa. Quanto vale $g'(1)$?

SIMULAZIONE - PRIMA PARTE

---

1. Trovare le coordinate polari (ρ, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi)$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane:
   a) $(0, -2)$ b) $(-1, 1)$ c) $(-1, -\sqrt{3})$.
2. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
3. Consideriamo la funzione $f(x) := \frac{e^x+1}{e^x-1}$. Trovare la formula della funzione inversa $f^1(y)$.
4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:
   a) $\frac{x^2+1}{e^x}$ b) $\arcsin(1-x)$ c) $\log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.
5. Scrivere lequazione della retta tangente al grafico $y = x\exp(x^3)$ nel punto di ascissa $x = 1$.
6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\frac{\sin x}{x^3} \ll \log x \ll \frac{|\log x|}{x} \ll xe^x \quad \text{per } x \to 0^+ .$$
7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\frac{x^2+1}{(\log x+1)^3} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $|\log(x+3)| \geq \frac{1}{(x+2)^2}$.

ESERCIZI-6

1. Scrivere il polinomio di Taylor in 0
   - di ordine 5 di $\tan(x)$;
   - di ordine 3 di $\sqrt[3]{1-9x^3}$;
   - di ordine 10 di $\sin(2x^2)$;
   - di ordine 4 di $\log(1-2x^2)$;
   - di ordine 11 di $x\sin(-2x^2)$.

2. Trovare la parte principale, per $x \to 0$, di:
   - $\sin(x) - x^2$;
   - $\sin(x^2) - x^2$;
   - $(\sin(x))^2 - x^2$;
   - $4\sin(x^2) - \log(1+4x^2)$;
   - $\dfrac{\log(1+x^4)}{\sin(x^8)}$.

3. Trovare la parte principale, per $x \to \infty$, di:
   - $\sqrt[3]{x+1}$;
   - $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}$;
   - $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$;
   - $\dfrac{3x^2+4x^4}{\cos(1/x)}$;
   - $\dfrac{\sin(1/x^2)\cos(e^{-x})}{2x^3+1}$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin(x^2+x^3) = O(x^a)$ per $x \to 0$.

5. * Trovare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la parte principale per $x \to 0$ di $\cos(x^2) - 1 + x^a$.

6. * Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 - \sqrt{2 - e^{-4x^2}}$ e di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

7. * Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(3 + \cos x) - \log 4$ e di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

8. * Dato $a \in \mathbb{R}$ considero la funzione
$$f(x) := (x+3a)^a + (x-1)^a\,.$$
   Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ nei seguenti casi:
   a) $a \neq 0, \frac{1}{3}$;
   b) $a = \frac{1}{3}$.

9. * Un foglio di carta deve contenere un'area di stampa di $40\,\text{cm}^2$, margine inferiore e superiore di $3\,\text{cm}$ e margini laterali di $2\,\text{cm}$. Trovare le dimensioni del foglio di area minima.

10. * Trovare le dimensioni del cilindro di area 2π e di volume massimo.

AVVERTENZA:
Asterisco *: medio/difficile.

ESERCIZI-7

1. Trovare larea del triangolo che ha come veritici i punti di intersezione con lasse x della funzione $f(x) = e^x\left(x^2 + 2x - 3\right)$ e terzo vertice nel punto di minimo relativo della funzione.

2. Determinare linsieme degli x in cui la funzione $2\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ è crescente.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (a + 2x^2)e^{3e}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) = \exp(2 - x^2)$ è convessa.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^{-x} + ax^2$ è convessa per $x \leq 0$.

6. * Determinare il piu grande intero positivo k per cui $e^{|x|} - |x| + \cos(x) \geq k$.

7. * Si considerino $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = ax^2$ con $a \in \mathbb{R}$. Si discuta al variare di a l'equazione $f(x) = g(x)$ e si dica per quale valore di a i due grafici sono tangenti.

8. ** Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x e y:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \tag{1}$$
con a parametro reale positivo.
a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico.
b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta di equazione $x + y = 4$.

9. * Dato $a > 0$, si consideri la funzione $f_a(x) := \left(x^2 + 2\right)^a$.
   - Determinare la parte principale di $f_a(x)$ per $x \to \infty$.
   - Dire per quali a la funzione f_a é convessa.
   - Disegnare il grafico di f_a al variare di $a > 0$.

10. ** a) Per ogni numero reale $a > 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$4 - x = \frac{a}{x^3}\,. \tag{2}$$
b) Sia $x(a)$ la più piccola delle soluzioni dell'equazione (1) per ogni $a > 0$ per cui esiste almeno una soluzione. Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

AVVERTENZA:
Un asterisco *: medio/difficile.
Cue asterischi **: difficile.

SIMULAZIONE

PRIMA PARTE

Tempo: 60 minuti.
Non è consentito l'uso della calcolatrice e di appunti.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x - \pi/3) = \cos(x - \alpha)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log^2 x}{x\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos(x)}{\sin(3x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{\log(1+x^4)-x^4}$.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{1-x^2}$; b) $\tan(x^5)$; c) $\log\big((x-1)^{3x}\big)$.
4. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ ha pendenza -1.
5. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{1+2^{x^2}}_{a} \ll \underbrace{x^3+4^{x+2}}_{b} \ll \underbrace{x^2 4^x}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x+1}{4^x-1}}_{d} \qquad \text{per } x \to +\infty\,.$$
6. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione $f(x) := (3-2x^4)\log(1+2x^2)$.
7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x2^x = O(e^{ax})$ per $x \to \infty$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tale che $-\arctan(x-1) \le y \le \frac{1}{(x-1)^2}$.

SECONDA PARTE

Tempo: 120 minuti.
Non è consentito l'uso di appunti, ma è consentito l'uso della calcolatrice.

1. a) Dire se la disequazione $2x^2 + 3x - 2 \ge \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $2x^2 + 3x - c \ge \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.
2. Una ditta deve organizzare la spedizione di 100 scatoloni uguali ad un certo destinatario. Per farlo si serve di due compagnie di spedizione: la compagnia A offre furgoni che possono trasportare 5 scatole per volta, ad un prezzo di 200 euro a furgone, mentre la compagnia B offre furgoni che possono trasportare 10 scatole per volta ad un prezzo base di 200 euro a furgone, a cui però va aggiunto un sovrapprezzo complessivo pari a $15n^2$ euro, dove n è il numero totale di furgoni affittati. Quanti furgoni conviene affittare dalla compagnia A e quanti dalla compagnia B?
3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) = (\cos(2x))^{-\frac{1}{x}} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

* Lo scritto d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compone di due parti: una prima parte con otto domande o problemi semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

ESERCIZI–9

---

1. Trovare tutte le primitiva di $\dfrac{1}{(x-4)(x+1)}$, di $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ e di $\dfrac{1}{x^2+9}$.
2. Trovare una primitiva di $x\sin(x)$, di $x\log^2(x)$ e di $\dfrac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)-\cos^2(x)-1}$.
3. Dire per quali $c \in [0, 2\pi]$ l'integrale $\int_0^c \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ è improprio.
4. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+x^2}{1+x^a+x^{2a}}\,\mathrm{d}x$ converge ad un numero finito.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(4-x^2)^{3x}}\,\mathrm{d}x$.
6. Calcolare l'area della regione R del piano compresa tra il grafico di $y = -e^x$ e la retta passante per $A = (1, -e)$ e $B = (0, -1)$.
7. * Consideriamo linsieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \le y \le f(x)$ dove
$$f(x) := (1+x)\exp(-x/2)\,.$$
a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.
8. * Si consideri il triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB uguale a 1 e con angolo in A di $\frac{\pi}{3}$. Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.
9. * Consideriamo la funzione $f(x) := 2\log x \log\log x$.
a) Disegnare il grafico di f.
b) Tra tutte le rette tangenti al grafico di f trovare quella per cui il punto di intersezione con lasse delle y è più basso possibile.
c) Disegnare linsieme A dei punti del piano compresi tra il grafico di f, la retta tangente descritta al punto b), e la retta di equazione $x = 1$. Dire se A ha area finita o meno.
10. * Studiare la funzione
$$\int_1^{(x+1)^2} \frac{1}{1+t^5}\,\mathrm{d}t\,.$$

AVVERTENZA:
Asterisco *: esercizio difficile.

ESERCIZI-5

---

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

   a) $\dot{x} = \dfrac{t}{x}$, b) $\dot{x} = x^2 + 1$, c) $\dot{x} = e^x \cos t$, d) $\dot{x} = e^t(x-1)$, e) $\dot{x} = t^2\sqrt{1-x^2}$.

2. a) Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1/2$.

   b) Cercare le soluzioni delle equazioni d) ed e) dell'esercizio precedente che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 1$.

3. Risolvere le seguenti equazioni lineari del primo ordine:

   a) $\dot{x} - 4x = 8$, b) $\dot{x} + 2tx = 0$, c) $\dot{x} + \dfrac{x}{t+1} = 6t$, d) $\dot{x} - e^t x = 0$.

4. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:

   a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$, c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$, d) $\ddot{x} + 9x = 0$;

   e) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$, f) $\ddot{x} - 4x = 0$, g) $\dot{x} + 2x = 0$, h) $\dot{x} - 3x = 0$.

6. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

   a) $\begin{cases} \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} \ddot{x} - 4x = 0 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = -2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$, d) $\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$.

7. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := ae^{bt}$ risolve l'equazione $\ddot{x} - 4x = e^t$.

8. Trovare una soluzione particolare $\tilde{x}$ per ciascuna delle seguenti equazioni lineari non omogenee.

   a) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = e^t$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4e^t$,

   c) $\dot{x} - 2x = 2t^2$, d) $\dot{x} + 2x = e^{-2t}$,

   e) $\ddot{x} + 4x = \sin(2t)$, f) $\dot{x} + x = 3t$,

   g) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t}$, h) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t \cos t$.

9. Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine $\dot{x} + 2x = 2t - 3e^t$ risolvendo prima l'equazione omogenea associata e poi cercando una soluzione particolare di $\dot{x} + 2x = 2t$ ed una di $\dot{x} + 2x = -3e^t$.

10. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine $\dot{x} + 4x = 16t$ risolvendo prima l'equazione omogenea associata e poi trovando una soluzione particolare.

    b) Trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

11. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + x = e^{-2t}$.

    b) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

12. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 2x = 4 - 3\sin t + 2\sin(2t)$.

13. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi alle condizioni iniziali:

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{x} = x^2 \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad \text{b)} \begin{cases} \ddot{x} - x = 2t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{c)} \begin{cases} \dot{x} + 2x = 4 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad \text{d)} \begin{cases} \dot{x} = 3t^2(1 + x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad .$$

14. a) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $x(t) := t^a$ risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}}{t} + \frac{2x}{t^2} = 0 \,.$$

b) Scrivere la soluzione generale di quest'equazione.

c) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(1) = 0$ e $\dot{x}(1) = 1$.

15. Utilizzando il cambio di variabile $x = tz$ risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{t}{2x} \,.$$