Versione: 25 febbraio 2024

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica 1 (561AA), a.a. 2022-23

Testi

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per il corso di laurea in Matematica si compongono di due parti: una prima parte con nove domande relativamente semplici di cui dare solo la risposta, ed una seconda con 4 o 5 problemi di cui dare invece una soluzione articolata. Il tempo a disposizione è di 70 minuti per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno sei risposte corrette nella prima parte, ed due problemi completamente risolti nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2022-23, incluse le prove in itinere. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 1 giugno 2023].
Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

Prima parte: Calcolo.

1. Richiamo di alcune nozioni di base
   - Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
   - Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni: definizione e significato; proprietà di base.
   - Funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari (senza dimostrazione).

3. Derivate
   - Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra; notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital (senza dimostrazione). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
   - Sviluppo di Taylor di una funzione e Teorema di Taylor (rappresentazione del resto come "o piccolo" e "o grande", con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme (semplice) di numeri reali, Estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Individuazione del valore massimo e minimo (oppure degli estremi superiore ed inferiore dei valori) di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione parziale).
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
   - Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.

- La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza. Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali.
   - Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Struttura dell'insieme delle soluzioni delle equazioni lineari.
   - Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine: soluzioni delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; ricerca della soluzione particolare di delle equazioni a coefficienti costanti e non omogenee per alcune classi di termini noti.
   - *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

Seconda parte: Analisi.

6. Basi di teoria degli insiemi.
   - Prodotto di due insiemi. Le funzioni $f : A \to B$ intese come grafici; caratterizzazione dei sottoinsiemi di $A \times B$ che sono grafici. L'insieme A^B delle funzioni da B ad A; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un dato insieme.
   - Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
   - Insiemi finiti e insiemi infiniti; insiemi numerabili e più che numerabili; insiemi con uguale cardinalità.
   - L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è un insieme numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è un insieme numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili. I numeri reali sono più che numerabili. *Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein (senza dimostrazione).*

7. Completezza dei numeri reali
   - I numeri reali estesi.
   - Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
   - *Insiemi (totalmente) ordinati, definizione di massimo e minimo di un insieme, definizione di estremo superiore ed inferiore, definizione di completezza. Caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

8. Successioni di numeri reali
   - Definizione di successione di numeri reali e di sottosuccessione. Definizione di limite di una successione; possibili comportamenti di una successione.
   - Le successioni monotone hanno limite.
   - Una successione converge ad un limite finito se e solo se è una successione di Cauchy.
   - Teorema di Bolzano-Weierstrass (ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente).
   - Successioni definite per ricorrenza. Risoluzione esplicita nel caso di ricorrenze lineari.

9. Funzioni continue
   - Rivisitazione della definizione continuità e di limite in termini di intorni.
   - Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.
   - Teorema di esistenza degli zeri (teorema dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.

- Teorema di Weierstrass (esistenza dei punti di massimo e minimo). Giustificazione dell'algoritmo per la ricerca di massimi e minimi visto nella prima parte del corso.

10. Derivate
    - Rivisitazione della definizione di derivata. Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta e della funzione inversa.
    - La derivata si annulla nei punti di massimo/minimo locale interni al dominio. Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
    - Uso dei teoremi di Cauchy e Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati in precedenza: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata (e di segno della derivata seconda); teorema di de L'Hôpital.
    - Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.

11. Integrale secondo Riemann
    - Funzioni uniformemente continue. Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono uniformemente continue.
    - Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
    - *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
    - Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.

12. Integrali impropri
    - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
    - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
    - Integrali impropri non semplici.

13. Serie numeriche
    - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
    - Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
    - Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
    - Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.
    - *Formula di Stirling (con dimostrazione parziale).*

14. Serie di potenze
    - Serie di potenze: raggio di convergenza e comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. *Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).*
    - Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$. Rappresentazione del numero e come serie. Definizione di e^z con z numero complesso e dimostrazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Rappresentazione di $\pi/4$ come serie.*

15. Equazioni differenziali lineari
    - Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque. Teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione) e struttura dell'insieme delle soluzioni.

- Risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti. Calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annichilatori.

T E S T I

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $\log(x^2/2^x)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $(\sin x - x)(1 + \log x) = O(x^a)$ quando $x \to 0^+$.

3. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x + x^2) - 1}{x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(\exp(x^2 + x^3))$.

4. Trovare il valore massimo/minimo di $\exp(x^3 - 3x + 1)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$ (se non esistono specificarlo e calcolare invece l'estremo superiore/inferiore dei valori).

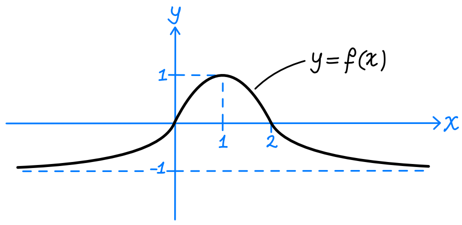
5. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in $x = 0$ della funzione $\displaystyle\frac{1}{1 - x^3 + x^6}$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 2x \exp(2x^2)\, dx$.

7. Calcolare la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria $P(t) := \big(e^t \cos(2t), e^t \sin(2t)\big)$.

8. Determinare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^t x^3$ tale che $x(0) = -1$.

9. Detta $f(x)$ la funzione il cui grafico è disegnato sotto, disegnare il grafico di $2f(1-x)$ e risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \leq 2f(1 - x)$.



SECONDA PARTE (prima variante)

1. a) Dato $a > 0$, risolvere l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8 - 4e^{2t} \,. \qquad (*)$$
b) Per quali $a > 0$ vale che *ogni* soluzione $x(t)$ di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{3t})$ per $t \to +\infty$?

2. a) Per ogni $a \geq 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^6 = a(x-1)^2 \qquad (*)$$
b) Per ogni $a \geq 0$ indico con $x(a)$ la più grande soluzione di (*). Disegnare il grafico della funzione $x(a)$, specificando l'insieme di definizione, i punti di discontinuità e i limiti significativi.
c) Trovare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

3. Dato $a > 1$, indichiamo con E_a l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che
$$|x|^a + |y|^a \leq 1 \,.$$
a) Fare un disegno approssimativo di E_4, discutendone anche la convessità.
b) Trovare la più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene E_4, e la più grande che è contenuta in E_4.
c) Dimostrare che E_a "cresce" al crescere di a.
d) Disegnare il "limite" di E_a per $a \to +\infty$.

4. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con parte principale ax^b per $x \to +\infty$ (con $b > 0$ e $a \neq 0$), consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(x) := \int_{x^2}^{x^2+x} f(t)\, dt \,.$$
Trovare la parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$. [*Suggerimento: iniziare dal caso* $f(x) := x^b$.]

5. Consideriamo due cilindri infiniti C_1 e C_2 di raggio 1 con assi che si intersecano ortogonalmente. Calcolare il volume dell'intersezione $V := C_1 \cap C_2$.
[*Può essere utile scegliere degli assi concreti e descrivere* V *in termini di disequazioni.*]

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni x con $0 \leq x \leq \pi$ della disequazione $2\cos(2x) \geq \sqrt{3}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^{\log x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2\, 2^x}{(x+1)^3}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^x} + \frac{1}{x^2}}_{a}\,, \quad \underbrace{x^4 + \log x}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{2x^4}{1-\log x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{x+1}{x^4+1}}_{d}\,.$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 6 di $f(x) := \log(1 + 2x^3 + x^6)$.

5. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := \exp(1 - ax^2)$ è concava nell'intervallo $-1 \leq x \leq 2$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int (9x^2 - 1) \log x \, dx$.

7. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} - (1 + t^2)x = 0$?

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 4t^3 x = 2t^3 \exp(2t^4)$ tale che $x(0) = 0$.

9. a) Disegnare i grafici delle funzioni $f_1(x) := (x+1)^{-2}$ e $f_2(x) := \sqrt{2-x}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.

Seconda parte (prima variante)

1. Consideriamo i triangoli delimitati dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} in un punto di ascissa positiva. Dire se tra questi triangoli ne esistono uno di area massima ed uno di area minima, e in caso affermativo determinarli.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - 1$$
a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, indicata con $g(x)$.
b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0$.

3. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $y^2 \leq x^2 - x^4$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.
a) Tracciare un disegno approssimativo di A e calcolarne l'area.
b) Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

Prima parte (prima variante)

1. Calcolare a) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x^2-x^6}$; c) $\lim_{x\to 1^+} \exp(-1/\log x)$.

2. Calcolare il polinomio di Taylor all'ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := \cos(2x - x^2)$.

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$.

4. Trovare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ per $n = 0, 1, 2, \dots$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-ax}\, dx$ è finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^a+n^{2a}}$ è finita.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n\log n}+1}$.

8. Consideriamo un punto P che si muove con legge oraria $P(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t)$. Scrivere il modulo della velocità e dire se la distanza L percorsa dall'istante $t = 1$ all'istante $t = +\infty$ è finita o infinita.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $\dfrac{1}{(|x|-1)^2} \le y \le x^2 + 2$.

Seconda parte

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, ed indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

   a) Dire per quali a l'area di A è finita.

   b) Dire per quali a il volume di V è finito.

2. Consideriamo una successione (x_n) che soddisfa l'equazione ricorsiva $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n}$. Discutere il comportamento di (x_n) al variare di $x_0 \in [0, 1]$.

3. Consideriamo la serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n^2 - n)} \,. \tag{*}$$

   a) Determinare il raggio di convergenza R e discutere il comportamento per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   b) Calcolare il valore $f(x)$ per $-R < x < R$. [*Suggerimento: calcolare* $f''(x)$.]

4. Consideriamo una funzione iniettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e una successione di numeri reali (x_m).

   a) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$.

   b) Dimostrare che se $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = L$ per qualche $L \in \mathbb{R}$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} = L$.

   c) Caratterizzare le funzioni σ per cui vale anche l'implicazione opposta in b).

5. Consideriamo un insieme X ed una successione di funzioni $f_n : X \to [0, 1]$ con $n = 1, 2, \dots$.

   a) Dimostrare che se X è finito esiste una sottosuccessione (n_k) tale che la successione di numeri reali $\big(f_{n_k}(x)\big)$ converge per ogni $x \in X$.

   b) Dimostrare che questo risultato vale anche se X è numerabile.

   c) Far vedere che questo risultato non vale per X qualunque.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{4 + x^2 - x^4}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^2) + ax^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\log\left(2^x x^{-2}\right)}_{a}\ , \quad \underbrace{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{1+2^x}}_{b}\ , \quad \underbrace{\frac{4x}{(\log x)^2 + 1}}_{c}\ , \quad \underbrace{\frac{1}{\log x - x^3}}_{d}\ .$$

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 + x^a}{(\cos x)^{2a}}\, dx$ è finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 - n^2}{2^n - 1} x^{2n}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + 4x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. In quale classe di funzioni conviene cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare $D^4 x - x = te^{-t}$?

9. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x| + 2} \le (1 - x)^3$.

SECONDA PARTE

1. Siano dati $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Come visto a lezione, f è continua in $\bar{x}$ se
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| \le \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \le \varepsilon. \tag{C1}$$
Consideriamo adesso la seguente variante dell'affermazione (C1):
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon. \tag{C2}$$
Dimostrare che (C1) e (C2) sono equivalenti.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo l'equazione differenziale
$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t + 1\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (*).
b) determinare gli a tali che tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := (\cos x)^{2x} - 1$.
b) Dato $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^3$.

4. Indichiamo con S_N le somme parziali della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}\,.$$
a) Trovare N affinché S_N approssimi S con errore inferiore a 10^{-3}.
b) Calcolare il valore esatto di S.
[*Suggerimento per b): considerare la serie di potenze* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.]

5. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che
$$\int_1^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty\,. \tag{1}$$
Dimostrare che:
a) l'integrale improprio $I := \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste se e solo se esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_1^n f(x)\, dx$.[1]
b) Dimostrare che la serie $S := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ si comporta come l'integrale improprio I.[2]
[*Suggerimento per b): porre* $a_n := \int_n^{n+1} f(x)\, dx - f(n)$ *e dimostrare che* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.]

[1] Si intende che in questo limite la variabile n è *intero*.
[2] Questa è una variante del teorema di confronto serie–integrale che si applica anche a funzioni f non decrescenti.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare $r > 0$ ed $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin x + \cos x = r \sin(x + \alpha)$.

2. Determinare l'inversa della funzione $f(x) := x^2 - x$ ristretta alla semiretta $x \leq \frac{1}{2}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{1 - 2x^2 - x^4}$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{x^3 + 1}{\log(x^4 + 1)} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$

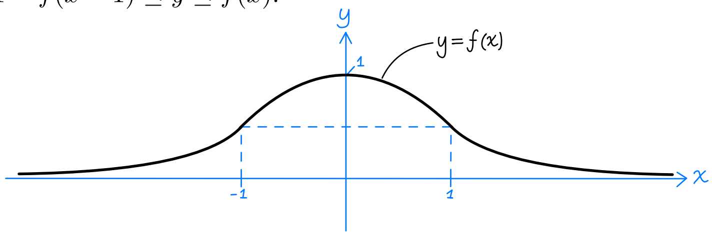
5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_2^{3^x} \frac{dt}{1 + t^8}$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 \leq x \leq 2$ e $(x + 1)^{-1/2} \leq y \leq x^{-1/2}$. Calcolare l'area di A.

7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2x = 2t$.

8. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n^2 + 1)^a - n^{2a}\right]$ converge ad un numero finito.

9. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato nella figura sotto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x - 1) \leq y \leq f(x)$.



SECONDA PARTE

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, e indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y.

   a) Dire per quali a l'area di A è finita.

   b) Dire per quali a il volume di V è finito.

2. Dire se esistono il massimo e il minimo di $\dfrac{n^2 - 6n + 8}{e^n}$ al variare di $n = 1, 2, \ldots$ e in caso affermativo calcolarli.

3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$2 \arctan x + \frac{1}{x} = a\,, \tag{1}$$
   e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni (se ne esiste almeno una).

   a) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione (**??**) al variare di $a \in \mathbb{R}$.

   b) Specificare il dominio, i punti di discontinuità e i limiti significativi della funzione $a \mapsto x(a)$, e disegnarne il grafico.

   c) Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to +\infty$.

4. a) Dimostrare che l'integrale superiore è subadditivo, cioè che date due funzioni limitate f, g sull'intervallo $[a, b]$, allora
$$\int_a^{*b} f(x)\, dx + \int_a^{*b} g(x)\, dx \geq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\, dx\,. \tag{2}$$
   b) Far vedere con un esempio che la disuguaglianza in (2) può essere stretta.

   c) Dimostrare che la disuguaglianza in (2) è un'uguaglianza se f è continua.

5. Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ vale $\limsup\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

Prima parte (prima variante)

1. Aggiungere l'ipotesi mancante nel seguente enunciato: *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora f ammette un valore minimo.*

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log(1+x)}{\log x}$, b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{4\log(1+x^2) - \log(1+4x^2)}{x^4}$, c) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+\sin x}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^3 + ax^2 + x$ è crescente su $\mathbb{R}$.

4. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := x^4 e^{-x^2}$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{x^2-1} dx$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $|y| \le \dfrac{4}{1+4x^2}$. Calcolare l'area di A.

7. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n\, x^{n^2+1}$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \tan x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\frac{\pi}{6}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3 + 1| \le \sqrt{2-x}$.

Seconda parte

1. a) Consideriamo un cono C con altezza h, base B e raggio di base r. Tra tutti i cilindri contenuti in C, e con base contenuta in B, trovare quello di volume massimo. (Sia il cono C che i cilindri sono circolari e retti.)

   b) Rispondere alla stessa domanda quando C è cono circolare ma non necessariamente retto. [*Detto P il piano che contiene la base B e detta p la proiezione ortogonale del vertice del cono su P , conviene distinguere il caso in cui p appartiene a B e il caso in cui non.*]

2. Dati $a < b < c$ ed una funzione $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ limitata, dimostrare che
$$\sideset{^*}{}\int_a^c f(x)\,dx = \sideset{^*}{}\int_a^b f(x)\,dx + \sideset{^*}{}\int_b^c f(x)\,dx$$
   dove $^*\!\!\int$ indica come al solito l'integrale di Riemann superiore.[1]

3. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale:
$$t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0\,. \tag{*}$$
   Trovare la soluzione generale di (*) nei seguenti casi: a) $a = 2$, $b = -6$; b) $a = b = 5$.

   [*Suggerimento: cercare soluzioni della forma t^λ.*]

4. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_x^{2x^2} \exp(t^2)\,dt\,.$$
   a) Trovare l'insieme di definizione di f, il segno , ed i limiti significativi.

   b) Scrivere f' e lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 di f in 0.

   c) Scrivere f'' e dimostrare che f è una funzione convessa.

   d) Trovare una funzione g della forma $g(x) = ax^b \exp(cx^d)$ tale che $g(x) \sim f(x)$ per $x \to +\infty$.

5. Data una successione (a_n) di numeri strettamente positivi, consideriamo la serie a segni alterni
$$S := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\,.$$
   a) Dimostrare che se la successione (a_n) è crescente allora la serie S non esiste.

   b) Far vedere che la conclusione al punto a) non vale se si sostituisce l'ipotesi che (a_n) è crescente con l'ipotesi che (a_n) converge ad un numero strettamente positivo.

[1] Ovviamente vale anche l'analoga uguaglianza per gli integrali inferiori.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Sia $f(x) := xe^{-x/2}$. Determinare l'immagine secondo f della semiretta $[1, +\infty)$.

2. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := (x-1)\, e^{ax}$ risulta crescente sulla semiretta $x \geq 0$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 di $f(x) := (1+x^2)\log(1-2x^2+x^4)$.

4. Determinare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_{n+2} = 8\, x_{n+1} - 15\, x_n$ per $n = 0, 1, \dots$

5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 4t^3$ tale che $x(0) = 0$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^a)^{2a}}$ è finito.

8. Trovare un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti (reali) ed omogenea che abbia come soluzione la funzione $x(t) = t(\cos t + e^{2t})$.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\displaystyle\frac{1}{1+|x|} \leq y \leq \log(1-x)$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Sia (a_n) una successione di numeri reali e $L \in \mathbb{R}$. Dimostrare che sono fatti equivalenti:
   (i) (a_n) converge a L per $n \to +\infty$;
   (ii) esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che a) $g(x) \to 0$ per $x \to 0$ e b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|a_n - L| \leq g(\varepsilon)$ per $n \geq n_\varepsilon$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, poniamo $x_n := \exp(n^a) - \exp(\sin(n^a))$ per $n = 1, 2, \ldots$
   a) Discutere il limite della successione (x_n) per $n \to +\infty$;
   b) Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3. Sia T la traiettoria di un punto nel piano che si muove con legge oraria $P(t) = (\cos t, 2 \sin t \cos t)$ per $t \in \mathbb{R}$, sia A la parte di piano delimitata dalla curva T e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.
   a) Disegnare la curva T e l'insieme A.
   b) Determinare la circonferenza circoscritta ad A.
   c) Calcolare l'area di A e il volume di V.

4. Per ogni $a > 0$, sia T_a il triangolo di vertici $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,e^{-a})$, e sia A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a > 0$.
   a) A è delimitato dagli assi e dal grafico di un'opportuna funzione f; determinare tale f.
   b) Dire se l'area di A è finita oppure no.

5. Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e strettamente crescente con inversa $g : Y \to X$.
   a) Dimostrare che se X è un intervallo allora g è continua.
   b) Dare un esempio di X (non intervallo), Y e f tali che g non è continua.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Convertire le coordinate cartesiane (x, y) in coordinate polari (ρ, α) e viceversa, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $x = -1$, $y = 1$; b) $x = 0$, $y = -3$; c) $\rho = 4$, $\alpha = \frac{11}{6}\pi$.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $(1 + 2x)^a + x^{2a} \log\log x = O(x^2)$ per $x \to +\infty$.

3. Dare un esempio di successione (x_n) tale che $x_n \to +\infty$ e $x_{n+1} - x_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp\bigl(ax^2 + (a^2 - 3)x\bigr)$ ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = \bigl((9t^2 - 1)\cos(3t); (9t^2 - 1)\sin(3t)\bigr)$. Calcolare il modulo della velocità di P e le distanza d percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$.

6. Dire per quale $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x^2)^a - x^{2a}\, dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = \sin t$.

8. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n + 1}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $(x - 1)^{-2} \leq |e^{-x} - 1|$

SECONDA PARTE

1. Sono dati X sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, e $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ funzioni tali che (i) $f_1(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$; (ii) f_2 è limitata in un intorno di $\bar{x}$.
   a) Dimostrare che $f_1(x) \cdot f_2(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$.
   b) Far vedere che l'enunciato a) non vale se si rimuove l'ipotesi (ii).
   c) Cosa succede se invece di (ii) si assume solo che (ii') $|f_2(x)|$ non tende a $+\infty$ per $x \to \bar{x}$?

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{-t} + e^t \,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*).
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = o(e^{4t})$ per $t \to +\infty$.

3. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $f(x) \leq y \leq 1$, dove
$$f(x) := \big(\cos(x^{-a})\big)^x \,.$$
   a) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali $a > 0$ l'insieme A ha area finita.
   c) Dire per quali $a > 0$ il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x ha volume finito.

4. a) Trovare la più grande costante m tale che $\dfrac{mx}{1+x^2} \leq \arctan x$ per ogni $x \geq 0$.[1]
   b) Stimare la più piccola costante r tale che $\arctan x \leq \dfrac{rx}{1+x}$ per ogni $x \geq 0$.[2]

5. Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^a)}{n}$ al variare di $a \in (-\infty, 1)$.

[1] L'esistenza di questa costante ottimale può essere data per buona; lo stesso vale per la costante nel punto b).
[2] "Stimare" significa dare una maggiorazione ed una minorazione della costante ottimale (possibilmente vicine). Credo che determinare il valore esatto della costante non sia possibile.